Б.М. Пранов
(Академия Государственной противопожарной службы МЧС России;
e-mail: info@academygps.ru)

ВЛОЖЕННЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА ПРИ ОБСЛУЖИВАНИИ УСТАНОВОК БЕЗОПАСНОСТИ С ПРИОРИТЕТАМИ

Приведены результаты исследований процесса технического обслуживания однотипных установок обеспечения безопасности.

Ключевые слова: установка, техническое обслуживание, отказ, цепи, вызов.

B.M. Pranov

EMBEDDED CHAIN OF THE MARKOV WHEN SERVICING THE INSTALLATION TO SAFETY WITH PRIORITY

The Broughted results of the studies of the process of the technical maintenance of the sister installing the provision to safety.

Key words: installation, technical maintenance, refusal, chain, call.

Рассмотрена работа бригады, обслуживающей n установок обеспечения безопасности. Каждая из этих установок требует технического обслуживания (ТО) в предусмотренные регламентом сроки. Будем считать, что бригада обслуживает установки одного типа. В таком случае её работа имеет циклический характер – сначала проводится ТО первой установки, затем – второй и так далее, пока не будет обслужена последняя; после этого процесс обслуживания повторяется.

В исследуемой ситуации установки все время находятся в эксплуатации (например, установки видеонаблюдения, контроля доступа, пожарной автоматики и др.). В связи с этим время от времени они выходят из строя (отказывают). Такие отказы фиксируются с помощью специальных датчиков (или другой аппаратуры), и в моменты возникновения отказов поступает вызов на приоритетное обслуживание отказавших установок. Отказы устраняются той же бригадой. Будем считать, что приоритетные вызовы не прерывают ТО, а установка с устраненным отказом занимает свое прежнее место в очереди на ТО.

Сформулируем теперь основную задачу: какое число n установок должна обслуживать бригада, чтобы она при наличии отказов с заданным уровнем надежности P выдерживала заданный интервал T между двумя ТО каждой установки?

В этой статье ограничимся установлением некоторых предельных соотношений, позволяющих с помощью теории марковских цепей и теорем теории вероятностей сводить поставленную задачу к изучению свойств двумерных нормальных распределений.

Введём предположения, при которых будет решаться задача. Предположим, что время ТО каждой установки постоянно и равно τ, время ликвидации отказа постоянно и равно τ_1, поток отказов данной установки – пуассоновский с параметром λ. Отказавшие установки образуют очередь приоритетных требований, которые обслуживаются в порядке поступления.

Вообще говоря, рассматриваемая система не является марковской. Однако, если рассматривать её в моменты окончания обслуживания (ТО или приоритетного обслуживания), то получается марковская цепь. Для установления этого факта определим состояние системы: через A_k обозначим ситуацию, когда в моменты окончания обслуживания очередного требования в очереди имеется k приоритетных требований (включая находящиеся на обслуживании). Ясно, что система может находиться только в состояниях A_0, A_1, …, A_{n-1}. Обозначим через P_{ij} вероятность перехода из состояния A_i в состояние A_j.

Для доказательства марковости необходимо установить, что вероятности P_{ij} зависят только от своих индексов, а также постоянных величин, определяющих систему (т.е. от τ, $\tau_{1,}$ λ).

С этой целью решим вспомогательную задачу. Обозначим через $q_{k,m}(t)$ вероятность того, что на интервале $[0, t)$ реализуется ровно k событий, если источник требований конечен и содержит m потенциально возможных событий, и если вероятность осуществления каждого события на интервале $[0, t)$ равна $1 - e^{-\lambda\ t}$. Нетрудно видеть, что для искомой вероятности имеет место формула

$$q_{k,m}(t) = C_m^k \cdot e^{-(m-k)\lambda t} \cdot (1 - e^{-\lambda t})^k, \tag{1}$$

где $k = 0,1 \ldots, m$.

С помощью формулы (1) теперь получаем:

$$P_{0,j} = q_{j,n-1}(\tau), \tag{2}$$

где $j = 0, 1, \ldots, n - 1$,

$$P_{i,j} = q_{j-i+1,\, n-i}(\tau_1), \tag{3}$$

где $i - 1 \le j \le n - 1$; в противном случае $P_{i,j} = 0$.

Итак, рассматриваемая система – марковская.

Пусть теперь

$$P = (P_{i,j})_{0 \le i, j \le n-1}. \tag{4}$$

есть матрица вероятностей перехода. Применим к этой системе некоторые результаты теории конечных цепей Маркова.

Прежде всего – матрица P регулярна. Это значит, что вероятность перехода $P_{i,j}^{(k)}$ за k шагов из A_i в A_j не равна нулю для какого-нибудь k. Для регулярных цепей Маркова теорема 5.1.2 книги [1] утверждает, что существует неподвижной вероятностный вектор $\overline{a}$, т.е. такой, для которого выполнено соотношение

$$\overline{a} \cdot P = \overline{a}.$$

Для компонент a_k (k = 0, 1, …, n - 1) этого вектора выполнено соотношение: $a_k \geq 0$, $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = 1$. Пусть матрица A такова, что все её строчки совпадают с вектором $\overline{a}$. Введем матрицу

$$Z = (Z_{ij}) = [E - p + A]^{-1}, \tag{5}$$

где E – единичная ($n \times n$) матрица. Образуем вектор

$$\vec{b} = \{b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\},$$

где

$$b_k = 2a_k Z_{kk} - a_k - a_k^2, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\text{-}1. \tag{6}$$

Пусть теперь $y_j^{(m)}$ - число попаданий системы в состояние A_j за первые m шагов. В таком случае имеет место так называемая центральная предельная теорема для цепей Маркова [2].

Теорема. Вектор $\overline{a}$ является вероятным вектором, а $\overline{b}$ – вектором предельных дисперсий для числа попаданий в состояние A_j. Иначе говоря, имеют место соотношения

$$M\left(\frac{y_j^{(m)}}{m}\right) \to a_j, \qquad M\left[\left(\frac{y_j^{(m)}}{m} - a_j\right)^2\right] \to b_j,$$

где M – математическое ожидание, а предел берется при $m \to \infty$.

Кроме того, если $b_j \neq 0$, то для любых чисел $r < S$

$$P\left[r < \frac{y_j^{(m)} - ma_j}{\sqrt{mb_j}} < S\right] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^s e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

при $m \to \infty$.

Для уточнения этой теоремы необходимо воспользоваться работой [3], где Колмогоровым доказано, что у вектора $\left(\frac{y_0^m}{m}, \ldots, \frac{y_{n-1}^{(m)}}{m}\right)$ существует предельное распределение при $m \to \infty$. Это распределение на гиперплоскости $y_0^{(m)} + \ldots + y_{n-1}^{(m)} = m$ с вектором средних (a_0, a_1, …, a_{n-1}).

Для вычисления ковариационной матрицы этого нормального распределения воспользуемся результатами работы [1]. Введем прежде всего матрицу $C = (C_{ij})$, где

$$\mathrm{C}_{ij} = a_i \mathrm{Z}_{ij} + a_i \mathrm{Z}_{ij} - a_i \delta_{ij} - a_i a_j, \tag{7}$$

(здесь $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Тогда теорема 4.6.7 [1] утверждает, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\cdot\operatorname{cov}\left[y_M^{(m)},\bar{y}_N^{(m)}\right]=\sum_{\substack{S_i\in M\\ S_j\in N}}C_{ij}\,. \tag{8}$$

В формуле (8) имеется в виду, что M и N, не пересекаясь, образуют полную систему состояний A_0, A_1, …, A_{n-1}.

Обозначим через $\bar{A}_0$ объединение состояний A_0, A_1, …, A_{n-1}, а $\bar{y}_0^{(m)}$ – число попаданий системы в состояние $\bar{A}_0$ за первые m шагов. В таком случае из формулы (8) следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\cdot\operatorname{cov}\left[y_0^{(m)},\bar{y}_0^{(m)}\right]=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\cdot\operatorname{cov}\left[y_0^{(m)},\bar{y}_0^{(m)}\right]=C_{00}\,,$$

так как $y_0^{(m)}$ и $\bar{y}_0^{(m)}$ связаны зависимостью

$$y_0^{(m)}+\bar{y}_0^{(m)}=m$$

Подведем теперь итог в следующей теореме.

Теорема. Величины $y_0^{(m)}$ и $\bar{y}_0^{(m)}$, являющиеся числами попаданий системы за первые m шагов в состояния A_0 и $\bar{A}_0$ соответственно, распределены асимптотически нормально со средними a_0 и $(1 - a_0)$ соответственно и равными дисперсиями C_{00} (см. формулу 7).

Эти величины связаны соотношением

$$y_0^{(m)}+\bar{y}_0^{(m)}=m\,.$$

Замечание. Отметим, что окончательный результат, сформулированный в теореме, не может быть получен более простым путем, так как цепь с двумя состояниями A_0 и $\bar{A}_0$ не является марковской и, следовательно, к ней не могут быть применены использованные результаты.

Литература

1. Кемени Дж. Дж., Снелл Дж. Л. Конечные цепи Маркова. - М.: Мир, 1964. - 426 с.

2. Чжун Кай Лай. Однородные цепи Маркова. - М.: Мир, 1964. - 426 с.

3. Колмогоров А.Н. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова. Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 1949. - 281-300 с.

4. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Физматтиз, 1967. - 632 с.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 7 мая 2009 г.