А.В. Нестеров[1], Ю.В. Прус[2]
([1]Российский государственный социальный университет,
[2]Академия Государственной противопожарной службы МЧС России;
e-mail: andrenesterov@yandex.ru)

МОДЕЛИРОВАНИЕ МИГРАЦИИ ЗАГРЯЗНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ПОЧВА-ПОВЕРХНОСТЬ-АТМОСФЕРА

В статье дано описание математической модели процесса переноса примеси в системе почва-поверхность-атмосфера.

Ключевые слова: модель, почва, поверхность, атмосфера.

A.N. Nesterov, Yu.V. Prus

MODELING TO MIGRATION OF THE CONTAMINATION IN SYSTEM GROUND-SURFACE-ATMOSPHERE

The article describes a mathematical model of transfer processes in the soil-surface-atmosphere.

Key words: model, soil, surface, atmosphere.

1. Введение

Сегодня математическое моделирование стало мощным инструментом для изучения и анализа самых разнообразных явлений и процессов, оно проникло во все области науки, в том числе в социальные и гуманитарные сферы. Зачастую математическое моделирование связывают, в первую очередь, с компьютерным моделированием, с непосредственными расчетами процессов с помощью ЭВМ. Однако во многих случаях математическое описание процесса настолько сложно, что непосредственные расчеты современными методами вычислительной математики на современных ЭВМ невозможны.

Зачастую необходимо получить не только численные результаты, но и качественную зависимость результата от входных данных модели, что с помощью численных расчетов сделать невозможно. На помощь в этих случаях приходит асимптотический анализ, который представляет собой не только классическую науку, но и междисциплинарный предмет, который интенсивно развивается, впитывая в себя идеи из различных областей и выполняя свою главную задачу - давать исследователям технологии качественного исследования сложных, нелинейных явлений.

Возможность получения семейства решений, приближенных формул для анализа и управления в реальном времени – вот те преимущества, которые дает традиционная математика, в т.ч. и асимптотический анализ.

Основное содержание статьи связано с сингулярно возмущенными задачами. Теория сингулярных возмущений как особое направление в теории асимптотических методов зародилась под влиянием работ А.Н. Тихонова и его учеников в середине 20 века. Хотя и перед этим в литературе изучались те или иные сингулярно возмущенные задачи (ряд задач с большим параметром и др.), но окончательное выделение теории произошло после красивой и работающей формализации А.Н. Тихоновым сингулярных возмущений и доказательства им основной теоремы о предельном переходе по малому параметру в решениях сингулярно возмущенной начальной задачи. Большой вклад в развитие теории сингулярных возмущений внесли работы отечественных авторов Васильевой А.Б., Понтрягина Л.С., Мищенко Е.Ф., Бутузова В.Ф., Вишика, Люстерника Л.А., Ломова С.А., Розова Н.Х. и др.

В настоящей статье отражены работы авторов, в которых строятся математические модели процессов переноса в различных многофазных средах с целью интегрировать технические идеи для построения асимптотики решения новых прикладных сингулярно возмущенных задач. Эти новые задачи связаны с переносом различных субстанций в многофазных средах, в частности, информации в социальной среде и т.д.

Подобные задачи возникают при описании самых разнообразных процессов – тепло- и массопереноса, переноса энергии, распространения примесей в природных и техногенных средах, переноса информации в связанных структурах и многих других. Особенностью этих задач является наличие критического случая, что, с одной стороны, приводит к новым особенностям решения, с другой стороны, усложняет построение асимптотик решений и требует развития новых методов.

Ряд математических моделей процессов переноса в многофазных средах представляет собой различные начально-краевые задачи для систем дифференциальных (или интегро-дифференциальных) уравнений в частных производных. Если в системе протекают процессы с существенно различными временными или пространственными масштабами, то соответствующие системы дифференциальных уравнений содержат малые параметры. Во многих случаях малые параметры стоят при старших производных, т.е. задачи оказываются сингулярно возмущенными. Зависимость решения таких задач от малых параметров неаналитическая, в решении присутствуют быстрые и медленные переменные и даже формулы, выражающие точное решение, могут быть малоинформативными и практически непригодными для использования.

Прямой численный расчет решений таких начально-краевых задач весьма труден, поскольку соответствующие системы уравнений в частных производных обладают большой жесткостью (отношение наибольшего характерного масштаба к наименьшему может иметь порядок 10^6-10^9 и более). К сожалению, на сегодняшний день нет универсальных разностных схем, пригодных для численного решения жестких систем уравнений в частных производных.

Кроме того, зачастую требуется получение пусть и приближенных, но аналитических формул для того, чтобы можно было проанализировать зависимость решения от многочисленных входных параметров. Такие же формулы требуются и для практического применения моделей. При большом числе входных параметров, которые могут иметь не числовую, а функциональную природу, качественный анализ решения с помощью численных методов становится невозможным.

В этом случае использование асимптотических методов для предварительного (а иногда и окончательного) анализа задачи является не только оправданным, но и совершенно естественным и необходимым. В общем случае после математической формулировки проблемы в системе уравнений выделяются малые параметры путем перехода к безразмерным переменным. В зависимости от вида возмущенной задачи к ней можно применить соответствующие методы малого параметра для получения асимптотического представления решения (АПР). В зависимости от вида исходной задачи АПР получается либо явно, либо как решение более простых, чем исходная, задач. Задачи, из которых определяется АПР, как правило, не содержат малых параметров и при необходимости к ним могут быть применены численные методы.

2. Математическая модель процесса переноса примеси в системе почва-поверхность-атмосфера

Исследование миграции загрязняющих примесей в системе атмосфера-почва чрезвычайно актуально. Разнообразным аспектам этого вопроса посвящена многочисленная литература (например, [1-10], хороший обзор литературы, посвященной этому вопросу, имеется в [2]). В частности, в работах [9], [10] рассматривались математические модели переноса примеси в атмосфере при наличии ветрового подхвата с подстилающей поверхности, но без учета распространения примеси вглубь почвы.

В статье исследуется математическая модель миграции примеси в системе атмосфера-почва с учетом ветрового подхвата с подстилающей поверхности и диффузии вглубь почвы. Эта модель является развитием модели, рассмотренной в работах [9], [10]. Основной целью авторов является получение простых асимптотических формул для описания переноса примесей.

Постановка задачи

Будем считать, что примесь может находиться в воздухе (например, на аэрозолях), на поверхности почвы и в глубине.

Будем рассматривать только миграцию примеси в пространстве, совершенно не учитывая возможные физико-химические трансформации.

Перемещение примеси в почве и атмосфере будем описывать в рамках традиционного конвективно-диффузионного подхода с учетом того, что примесь может находиться на поверхности почвы, откуда может подхватываться ветром и уноситься в атмосферу и так же диффундировать вглубь почвы. Направив декартовы координаты x, y горизонтально, а z вертикально ($z = 0$ соответствует поверхности почвы), запишем уравнение, описывающие перемещение примеси в атмосфере $(z > 0)$ под действием турбулентной диффузии, направленного переноса и силы тяжести:

$$\frac{\partial c_a}{\partial t} + \nabla(\overline{V} c_a) - w \frac{\partial c_a}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(K_{az} \frac{\partial c_a}{\partial z}) + \nabla(K \nabla c_a), \qquad (1)$$

где c_a - концентрация примеси в атмосфере, ∇ - оператор градиента по переменным x, y, $\overline{V}$ - горизонтальная компонента скорости ветра, w - скорость оседания примеси, K, K_z - коэффициенты турбулентной диффузии по горизонтали и вертикали соответственно.

При описании миграции примеси в почве $(z < 0)$ учтем перемещение только по вертикали, которое опишем с помощью уравнения диффузионно-конвективного переноса

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(K_{sz} \frac{\partial c_s}{\partial z} - w_s c_s), \qquad (2)$$

где c_s - концентрация примеси в почве, w_s - скорость просачивания примеси вглубь почвы, K_{sz} - коэффициент псевдодиффузии в почве вертикали. В соответствии с принятой моделью примесь может находиться и на поверхности $(z = 0)$. Обозначив поверхностную концентрацию примеси через c_r, запишем уравнение баланса примеси на поверхности почвы

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} = J^+ - J^-, \qquad (3)$$

где J^+ и J^- – потоки примеси на поверхность почвы из атмосферы и с поверхности вглубь почвы, которые равны

$$J^+ = -(K_{az} \frac{\partial c_a}{\partial z} + w_a c_a)\,|_{z=0}, J^- = (K_{sz} \frac{\partial c_s}{\partial z} + w_s c_s)\,|_{z=0}\,. \qquad (4)$$

Для замыкания системы уравнений (1-3) необходимо выразить потоки (4) J^+, J^- через концентрации примеси у поверхности. Так же, как и в работе [9], будем считать, что поток примеси из атмосферы на поверхность есть сумма двух слагаемых:

$$J^+ = -\alpha c_r + v_g c_a\,|_{z=0}\,. \qquad (5)$$

Первое слагаемое описывает ветровой подхват примеси с поверхности (α - коэффициент ветрового подхвата), второй - сухое осаждение на поверхность из атмосферы (v_g - скорость сухого осаждения). Конвективно-диффузионный поток примеси вглубь почвы с поверхности пропорционален концентрации примеси на поверхности;

$$J^{-} = \beta c_r, \qquad (6)$$

где β - коэффициент просачивания.

В данной статье коэффициенты α, v_g, β вводятся эмпирически, подробнее об этих величинах можно узнать, например, в работах [5-7]. Совокупность уравнений (1-3) и краевых условий (5-6) в сочетании с уравнениями (4) для потоков примеси является замкнутой системой. Отметим, что при отсутствии подхвата эта система переходит в хорошо известное уравнение турбулентной диффузии в атмосфере с краевым условием Монина [4]. В общем случае решение системы уравнений (1-3) с краевыми условиями (4-6) представляет большие сложности как в математическом отношении, так и в отношении обеспеченности данными.

Однако про определенных условиях в этой системе можно выделить малый параметр, наличие которого заметно упрощает решение задачи. Рассмотрим задачу в тех же предположениях, что и в работе [9], т.е. для случая, когда характерное время перемешивания по вертикали в атмосфере намного меньше характерного времени T_a перемещения по горизонтали. Характерное время T_a перемещения по горизонтали можно грубо оценить как L/V_0, где L - характерный масштаб области переноса по горизонтали, V_0 - характерная скорость переноса по горизонтали. Масштабом скорости перемещения по вертикали является т. н. скорость трения U_*. Характерное время перемещения по вертикали равно h/U_*, где h - характерная толщина атмосферы, в которой сосредоточена основная масса примеси (грубо её можно оценить как K_z / w).

Будем считать, что время установления равновесия между концентрацией примеси на поверхности и в приземном слое атмосферы также намного меньше времени T_a. Характерное время установления равновесия можно оценить как h/v_g.

Поскольку коэффициент псевдодиффузии и скорость переноса в почве на много порядков меньше, чем коэффициент турбулентной диффузии и скорость переноса в атмосфере, то характерное время переноса в атмосфере T_a намного меньше, чем характерное время миграции примеси в почве T_s. Все эти предположения можно записать в виде неравенства

$$h/U_*, h/v_g << T_a << T_s. \qquad (7)$$

Как показано в работе [9], это справедливо для примесей, имеющих скорость оседания w_a = 1 *см/сек* и выше, перемещающихся под действием ветра со скоростью порядка нескольких метров в секунду на расстояния порядка сотен километров и более.

В силу неравенств (7) величина $\varepsilon = h/TU_*$ есть малый параметр, т.е.

$0 < \varepsilon << 1$.

Перейдем, как и в [9], к переменным

$$t = t_1 T_0, x = x_1 L_0, y = y_0 L_0, z = z_1 h, c_r = c_{r_1} h,$$

где L_0 – характерный масштаб переноса примеси по горизонтали (сотни *км*), T_0 - характерное время переноса примеси по горизонтали (порядка 10^5 *сек*), $h = K_z w^{-1}$ - характерный масштаб по вертикали.

Учтём, что коэффициент диффузии и скорость конвективного переноса в почве намного меньше, чем те же величины для атмосферы, поэтому можно записать:

$$K_{zs} = \varepsilon^M K_{1zs}, w_s = \varepsilon^M w_{1s},$$

где величины K_{1zs}, w_{1a} того же порядка, что и K_{za}, w_a, а $M \geq 1$ - некоторое натуральное число. В дальнейшем будем полагать $M = 1$. Опуская для краткости записи индекс 1 у новых переменных, запишем систему (1-6) в безразмерном виде:

$$\varepsilon(\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(\overline{V} p) - \nabla(K \nabla p)) = \frac{\partial}{\partial z}(K_{az}\frac{\partial p}{\partial z}) + w_a \frac{\partial p}{\partial z}, z > 0, \qquad (8)$$

$$\varepsilon \frac{\partial r}{\partial t} = -(\alpha + \varepsilon^M \beta) r + \gamma p |_{z=0}, z = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \varepsilon^{M-1} \frac{\partial}{\partial z}(K_{sz}\frac{\partial q}{\partial z} - w_s q), z < 0, \qquad (10)$$

$$(K_{az}\frac{\partial p}{\partial z} + w_a p)|_{z=0} = -\alpha r + \gamma p |_{z=0}, \qquad (11)$$

$$(K_{sz}\frac{\partial q}{\partial z} + w_s q)|_{z=0} = \beta r. \qquad (12)$$

где $p(x, y, z, t), q(x, y, z, t), r(x, y, t)$ - безразмерные концентрации примеси в атмосфере, почве и на поверхности соответственно, коэффициенты системы (8-12) безразмерны и имеют порядок O(1).

Систему (8-12) необходимо дополнить начальными условиями:

$$p(x, y, z, 0) = p^0(x, y, z), q(x, y, z, 0) = q^0(x, y, z), \qquad (13)$$

$$r(x, y, 0) = r^0(x, y,) \qquad (14)$$

и краевыми условиями на бесконечности

$$p \xrightarrow[z \to \infty]{} 0 \ , q \xrightarrow[z \to -\infty]{} 0 \qquad (15)$$

В настоящей статье ограничимся формальным построением асимптотик без строгого обоснования, поскольку основной целью является получение простых формул для оценок переноса примеси.

Для построения асимптотики решения задачи (8)-(13) потребуем выполнение условий:

1. $K(x,y,z,t) \geq K_0 > 0$, $K_z(x,y,z,t), K_a(x,y,z,t) \geq K_0 > 0$,
   $w_a, w_s \geq w_0 > 0$, $\gamma(x,y,t) \geq \gamma_0 > 0$, $\alpha(x,y,t) > \alpha_0 > 0$.

2. Функции $K, K_{za}, K_{zs}, V, w_s, \gamma, \alpha, \beta, p^0, r^0, q^0$ – достаточно гладкие, p^0, q^0 – финитные по x, y, z (r^0 - по x, y).

Построение асимптотики

Асимптотика решения системы (8)-(13) будет построена в виде суммы регулярного ряда и различных погранфункций.

Построение асимптотик производится по стандартному алгоритму (например, [11], [9], [10]).

1) Регулярные части асимптотического разложения строятся в виде рядов по степеням ε:

$$\overline{p} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \, \overline{p}_i \,, \overline{r} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{r}_i \,, \overline{q} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{q}_i \,.$$

Подставим эти ряды в (8)-(13) и приравняем коэффициенты с одинаковыми степенями ε. Слагаемые порядка ε^0 дают соотношения

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{za} \frac{\partial \overline{p}_0}{\partial z} + w_a \overline{p}_0 \right) = 0 \,, \tag{16}$$

$$\gamma \overline{p}_0 |_{z=0} - \alpha \overline{r}_0 = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zs} \frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z} + w_s \overline{q}_0 \right), \tag{18}$$

$$\left(K_{za} \frac{\partial \overline{p}_0}{\partial z} + w_a \overline{p}_0 \right)_{z=0} = -\alpha_s \overline{r}_0 + \gamma \overline{p}_0 |_{z=0} \,, \tag{19}$$

$$\left(K_{zs} \frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z} + w_s \overline{q}_0 \right)_{z=0} = \beta \overline{r}_0 \,. \tag{20}$$

Учитывая (15), из (16) получаем:

$$K_{za}\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial z}+w_a\overline{p}_0=0\,.$$

Значит $\overline{p}_0=\phi(x,y,z,t)\psi_0(x,y,t)$, где $\phi=\exp(-w_a\int_0^z\frac{dz}{K_{za}})$, ψ_0 - неопределенная пока функция.

Из (17) получаем, что

$$\overline{r}_0=\frac{\gamma}{\alpha}\psi_0(x,y,t).$$

Функция $\overline{q}_0$ есть решение задачи

$$\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z}+w_s\overline{q}_0\right), \tag{21}$$

$$\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z}+w_s\overline{q}_0\right)_{z=0}=\frac{\beta\gamma}{\alpha}\psi_0(x,y,t). \tag{22}$$

$$\overline{q}_0|_{t=0}=q_0(x,y,z). \tag{23}$$

Для определения ψ_0 запишем члены порядка ε:

$$\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial t}+\nabla(V\overline{p}_0)-\nabla(K\nabla\overline{p}_0)=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{za}\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial z}+w_a\overline{p}_1\right), z>0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \overline{r}_0}{\partial t}=\gamma\overline{p}_1|_{z=0}-\alpha\overline{r}_1-\beta\overline{r}_0, z=0, \tag{25}$$

$$\left(K_{za}\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial z}+w_a\overline{p}_1\right)_{z=0}=-\alpha_s\overline{r}_1+\gamma\overline{p}_1|_{z=0}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \overline{q}_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_1}{\partial z}+w_s\overline{q}_1\right), z<0, \tag{27}$$

$$\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_1}{\partial z}+w_s\overline{q}_1\right)_{z=0}=\beta\overline{r}_1\,. \tag{28}$$

Из (25) следует:

$$\overline{r}_1=\frac{1}{\alpha}(\gamma\overline{p}_1-\beta\overline{r}_0-\frac{\partial \overline{r}_0}{\partial t}).$$

Интегрируя (24) по z от 0 до ∞, получаем:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial t} + \nabla(V\overline{p}_0) - \nabla(K\nabla\overline{p}_0) \right) dz =$$

$$= K_{za}\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial z} + w_a\overline{p}_1 |_{z=0}^{z=\infty} = -\left(\frac{\beta\gamma\overline{p}_0}{\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\gamma\overline{p}_0}{\alpha} \right).$$

Подставляя $\overline{p}_0 = \phi\psi_0$ и учтя, что $\phi(x,y,t,0)=1$, после несложных выкладок получаем уравнение для определения ψ_0:

$$L\psi_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t}(h\psi_0) + \nabla(V^*\psi_0) - \nabla(K^*\nabla\,\psi_0) + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\psi_0 = 0, \tag{29}$$

где

$$h(x,y,t) = \frac{\gamma}{\alpha} + \int_0^\infty \phi dz\,,\, V^*(x,y,t) = \int_0^\infty \left(V\phi - K\nabla\phi \right) dz\,,$$

$$K^*(x,y,t) = \int_0^\infty K\phi dz$$

Начальные условия для уравнения (27) будут поставлены ниже, в п. 2. Проинтегрируем (24) по z от z до ∞:

$$\left(K_{za}\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial z} + w_a\overline{p}_1 \right)_z^\infty = \int_z^\infty \left(\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial t} + \nabla(V\overline{p}_0) - \nabla(K\nabla\overline{p}_0) \right) dz \equiv$$

$$\equiv \Phi_1(x,y,z,t),$$

откуда

$$\overline{p}_1 = \phi\left(\psi_1(x,y,t) - \int_0^z \frac{\Phi_1}{K_{za}\phi}dz \right) = \phi(\psi_1 - g_1),$$

где ψ_1 - пока неопределенная функция, $g_1 = \int_0^z \frac{\Phi_1}{K_{za}\phi}dz$.

Из (25) получаем:

$$\overline{r}_1 = \frac{1}{\alpha}(\gamma\overline{p}_1|_{z=0} + \beta\overline{r}_0 - \frac{\partial \overline{r}_0}{\partial t}).$$

В общем случае при рассмотрении членов порядка ε^n получаем уравнения для определения соответствующих членов регулярных рядов:

$$\overline{p}_{n-1} = \phi(x,y,z,t)\psi_{n-1}(x,y,t), \tag{30}$$

$$L\psi_{n-1} = 0, \tag{31}$$

$$\overline{r}_n = \frac{1}{\alpha}(\gamma \overline{p}_n|_{z=0} - \beta \overline{r}_{n-1} - \frac{\partial \overline{r}_{n-1}}{\partial t}) \tag{32}$$

$$\frac{\partial \overline{q}_n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_n}{\partial z} + w_s \overline{q}_n\right), \tag{33}$$

$$\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_n}{\partial z} + w_s \overline{q}_n\right)_{z=0} = \frac{\beta\gamma}{\alpha}\psi_n(x,y,t). \tag{34}$$

$$\overline{q}_n|_{t=0} = 0. \tag{35}$$

Для того, чтобы $\overline{p}_n, \overline{r}_n$ определялись однозначно, необходимо поставить начальные условия для уравнения ψ_n. Для этого необходимо рассмотреть соответствующие пограничные функции.

2) Так как $\overline{p}_n$ и $\overline{r}_n$, связанные алгебраическими соотношениями (26), ни в каком приближении не могут сразу удовлетворить два начальных условия при $t = 0$, то в окрестности $t = 0$ возникает пограничный слой. Для его описания введем растянутую переменную $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ и будем строить пограничные функции в виде рядов:

$$\Pi_p(x,y,z,\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_{pi}(x,y,z,\tau)\,,$$

$$\Pi_r(x,y,\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_{ri}(x,y,\tau)\,,$$

$$\Pi_q(x,y,z,\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_{qi}(x,y,z,\tau)\,.$$

Потребуем, чтобы пограничные функции формально удовлетворяли уравнениям и совместно с регулярными рядами - начальным и граничным (если последнее возможно) условиям. Подставляя эти ряды в (8)-(15), разлагая коэффициенты по степеням ε и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получаем уравнения для Π_{pi}, Π_{ri}, Π_{qi}:

$$\frac{\partial \Pi_{pi}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{za}\frac{\partial \Pi_{pi}}{\partial z} + w_a \Pi_{pi}\right) + \pi_{i1}(x,y,z,\tau)\,,\ z > 0\,,\ \tau > 0\,, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \Pi_{ri}}{\partial \tau} = \gamma \Pi_{pi}|_{z=0} - \alpha_s \Pi_{ri} + \pi_{i2}(x,y,\tau)\,,\ \Pi_{pi} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0\,, \tag{37}$$

$$\frac{\partial \Pi_{qi}}{\partial \tau} = \pi_{i3}(x,y,z,\tau)\,,\; \Pi_{qi} \xrightarrow[z\to-\infty]{} 0\,,\; z<0\,,\; \tau>0\,, \tag{38}$$

$$\left(K_{za}\frac{\partial \Pi_{pi}}{\partial z} + w_a \Pi_{pi} \right)_{z=0} = -\alpha_s \Pi_{ri} + \gamma \Pi_{pi}|_{z=0} + \pi_{i4}\,, \tag{39}$$

где $K_{za} = K_{za}(x,y,z,0)$, $\gamma = \gamma(x,y,0)$,

$\alpha_s = \alpha_s(x,y,0)$, $\pi_{01} = \cdots = \pi_{04} = 0$,

$\pi_{i1}, \pi_{i2}, \pi_{i4}$, выражаются через $\Pi_{pj}, \Pi_{rj}, \Pi_{qj}, j<i$, , π_{i3} - через Π_{qj}, $j<i$.

Из (38), приняв во внимание то, что $\Pi_{qi}|_{t=0} = 0\ \forall i$, получаем $\Pi_q = 0$.

Рассмотрим случай $i=0$. Проинтегрировав (36) по z от 0 до ∞ с учётом (37), (39), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\int_0^\infty \Pi_{p0} dz + \Pi_{r0} \right) = 0\,.$$

Так как

$$\Pi_{p0}\,, \Pi_{r0} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0\,,$$

то получаем

$$\int_0^\infty \Pi_{p0} dz + \Pi_{r0} = 0\,.$$

Требуя, чтобы Π_{p0} и Π_{r0} совместно с $\overline{p}_0$ и $\overline{r}_0$ удовлетворили начальному условию, получаем:

$$(\overline{p}_0 + \Pi_{p0})|_{t=0} = p^0\,,\quad (\overline{r}_0 + \Pi_{r0})|_{t=0} = r^0\,,$$

откуда следуют начальные условия для $\psi_0, \Pi_{p0}, \Pi_{r0}$:

$$\psi_0(x,y,0) = \frac{\int_0^\infty p^0 dz + r^0}{h(x,y,0)}\,,$$

$$\Pi_{p0}(x,y,z,0) = \overline{p}^0(x,y,z) - \phi(x,y,z,0)\psi_0(x,y,0)\,,$$

$$\Pi_{r0}(x,y,0) = -\int_0^\infty P_0(x,y,z,0)dz\,.$$

Для $i>0$ получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\int_0^\infty \Pi_{pi} dz + \Pi_{ri} \right) = \int_0^\infty \pi_{i1} dz + \pi_{i2} - \pi_{i4}\,,$$

откуда

$$\int_0^\infty \Pi_{pi} dz + \Pi_{ri} = \int_\tau^\infty \left(\int_0^\infty \pi_{i1} dz + \pi_{i2} - \pi_{i4} \right) d\tau .$$

Отсюда из условий $(\overline{p}_i + \Pi_{pi})_{t=0} = 0$, $(\overline{r}_i + \Pi_{ri})_{t=0} = 0$ нетрудно получить начальные условия для функций ψ_i, Π_{pi}, Π_{ri} для всех $i \ge 1$.

3. Отметим, что построенная функция Π_r вносит невязку в краевое условие (12) при $z = 0$. Для ликвидации этой невязки в окрестности точки $z = 0, t = 0$ строится дополнительная погранфункция S_r. Определим новую растянутую переменную $\eta = \frac{z}{\sqrt{\varepsilon}}$ и будем строить погранфункцию S_r в виде:

$$S_r(x, y, \eta, \tau) = \sum_{i=0}^\infty \varepsilon^{\frac{i}{2}} S_{ri}(x, y, \eta, \tau) .$$

Потребуем, чтобы погранфункция S_r формально удовлетворяла уравнению (10) и совместно с функцией Π_r - однородному краевому условию (12). Переходя в (10), (12) к новым переменным, стандартным образом получаем уравнения для определения S_{ri}:

$$\frac{\partial S_i}{\partial \tau} = K_{zs} \frac{\partial^2 S_i}{\partial \eta^2} + s_{i1}(x, y, \eta, \tau), \eta < 0, \tag{40}$$

$$K_{zs} \frac{\partial S_i}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} = \beta \Pi_{r(2i+1)}(x, y, \tau) + s_{i2}(x, y, \tau), \tag{41}$$

$$S_i \big|_{\tau=0} = 0 , \tag{42}$$

где $K_{zs} = K_{zs}(x, y, 0, 0)$, $\beta = \beta(x, y, 0)$, $s_{01} = s_{02} = 0.$

s_{i1} выражается через $\frac{\partial S_j}{\partial \eta}$, $\eta \frac{\partial^2 S_j}{\partial \eta^2}$, $j < i$,

s_{i2} выражается через $S_j \big|_{\eta=0}$, $\frac{\partial S_j}{\partial \eta}\big|_{\eta=0}$, $j < i$.

На этом алгоритм построения при $M = 1$ закончен. Асимптотическое разложение порядка N при $M = 1$ имеет вид:

$$p(x, y, z, t) = P_N + \rho_{Np}, r(x, y, t) = R_N + \rho_{Nr}, q(x, y, z, t) = Q_N + \rho_{Nq},$$

где P_N, R_N, Q_N - частичные суммы построенных асимптотических рядов

$$P_N = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (\overline{p}_i(x, y, z, t) + \Pi_{pi}(x, y, z, \tau)),$$

$$R_N = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (\overline{r}_i(x, y, z, t) + \Pi_{ri}(x, y, \tau)),$$

$$Q_N = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \overline{q}_i(x, y, z, t) + \sum_{i=0}^{2N} \varepsilon^{\frac{i}{2}} S_{ri}(x, y, \eta, \tau) ,$$

а $\rho_{Np}, \rho_{Nr}, \rho_{Nq}$ - остаточные члены в асимптотическом разложении - имеют порядок $O(\varepsilon^{N+1})$.

Заключение

В заключение выпишем формулы для первых членов асимптотик.

Для практических рассчетов, как правило, вполне достаточно первых членов регулярного ряда.

Концентрация примеси в атмосфере, в глубине почвы и на ее поверхности ($p(x,y,z,t), q(x,y,z,t), r(x,y,t)$ соответственно) могут быть приближенно вычислены как первые члены регулярного ряда, что дает

$$p(x,y,z,t) \approx p_0(x,y,z,t), q(x,y,z,t) \approx q_0(x,y,z,t),$$

$$r(x,y,t) \approx r_0(x,y,t),$$

где $p_0(x,y,z,t), q_0(x,y,z,t), r_0(x,y,t)$ вычисляются по следующим формулам:

$$\overline{p}_0 = \phi(x,y,z,t)\psi_0(x,y,t),$$

где $\phi = \exp(-w_a \int\limits_0^z \frac{dz}{K_{za}})$,

$$\overline{r}_0 = \frac{\gamma}{\alpha}\psi_0(x,y,t).$$

Функция ψ_0 определена как решение уравнения

$$L\psi_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t}(h\psi_0) + \nabla(V^*\psi_0) - \nabla(K^*\nabla\psi_0) + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\psi_0 = 0,$$

где

$$h(x,y,t) = \frac{\gamma}{\alpha} + \int\limits_0^\infty \phi dz \, , V^*(x,y,t) = \int\limits_0^\infty \left(V\phi - K\nabla\phi\right) dz \, ,$$

$$K^*(x,y,t) = \int\limits_0^\infty K\phi dz,$$

с начальными условиями

$$\psi_0(x,y,0) = \frac{\int\limits_0^\infty p^0 dz + r^0}{h(x,y,0)}.$$

Функция $\overline{q}_0$ есть решение задачи

$$\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z} + w_s\overline{q}_0\right),$$

$$\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z} + w_s\overline{q}_0\right)_{z=0} = \frac{\beta\gamma}{\alpha}\psi_0(x,y,t),$$

$$\overline{q}_0|_{t=0} = q_0(x,y,z).$$

Асимптотика решения задачи, полученная выше, является следствием заложенных в модель физических предположений о разных временных масштабах переноса примеси в атмосфере и почве. Полученные асимптотические формулы позволяют рассчитывать долгосрочную миграцию примесей в системе почва-атмосфера. Расчет по асимптотическим формулам существенно проще, чем решение исходной системы уравнений, и требует меньше информации.

Асимптотические формулы можно использовать как для качественных оценок перераспределения примеси после первоначального попадания на поверхность почвы, так и в качестве расчетных в численных моделях.

В качестве коэффициентов диффузии и средней скорости переноса примеси в атмосфере в этом случае необходимо брать среднеклиматические величины коэффициентов диффузии и скорости переноса или их оценки по розе ветров (матожидание и дисперсию скорости ветра).

Литература

1. Баренблатт Г.И., Голицын Г.С. Локальная структура развитых пылевых бурь. -М.: Изд-во МГУ, 1973.

2. Бызова Н.Л. Рассеяние примеси в пограничном слое атмосферы. - М.: Гидрометеоиздат, 1974. - 191 с.

3. Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.Н. Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчёты рассеяния примеси. - Л.: Гидрометеоиздат, 1991. - 275 с.

4. Монин А.С. - О граничном условии на поверхности земли для диффундирующей примеси // В сб.: Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха. - М.: ИЛ, 1962.

5. Трансурановые элементы в окружающей среде / Пер. с англ. - М.: Энергоатомиздат, 1985.

6. Schemel G. Deposition and resuspension. In: Athmospheric science and power production, J. Randerson (ed.), 1984.

7. Soo S.L., Chen F.F. The boundary condition of the diffusion equation. - Powder Technol., 1982, vol. 31.

8. Slinn W. Formulation and solution of the diffusion-deposition-resuspension problem. - Atmos. Environ. 1967, vol.10, № 3.

9. Возженников О.И., Нестеров А.В. О переносе примеси в атмосфере при ветровом подхвате с подстилающей поверхности. Метеорология и гидрология, 1988.

10. Возженников О.И., Нестеров А.В. О граничном условии для уравнения турбулентной диффузии при пылящей подстилающей поверхности. Метеорология и гидрология, 1991.

11. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. - М.: Изд-во МГУ, 1978. - 262 с.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 27 мая 2009 г.