Н.Г. Топольский[1], И.Ю. Святенко[2], Г.Б. Трефилов[2], А.П. Сатин[1]
([1]Академия Государственной противопожарной службы МЧС России,
[2]Московский государственный строительный университет;
e-mail: info@academygps.ru)

# ИНТЕРАКТИВНЫЙ ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ГРАФОВ ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ В СИСТЕМАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Предложенный метод декомпозиции графов основан на формализации упорядоченной последовательности картежа вершин графа, построении функции связи и использовании интерактивной процедуры декомпозиции по локальным минимумам этой функции.

Ключевые слова: безопасность, системы поддержки принятия решений, критически важные объекты, автоматизация, декомпозиция, оптимизация.

N.G. Topolskiy, I.Y. Svjatenko, G.B. Trefilov, A.P. Satin

# INTERACTIVE OPTIMIZATION A METHOD OF DECOMPOSITION GRAPH RELATIONSHIPS OF CAUSE AND EFFECT IN SYSTEM OF SUPPORT OF DECISION-MARKING

The offered method of decomposition graph is based on formalization of the ordered sequence of card-playing of tops the column, construction of function of communication and use of interactive procedure of decomposition on local minima of this function.

Key words: safety, systems of support of decision-making, critically the important objects, automation, decomposition, optimization.

В настоящей статье решение проблемы декомпозиции предложено иллюстрировать на примере ориентированных графов, как наиболее употребительной модели причинно-следственных связей в системах поддержки принятия решений (СППР). С этой целью определим характеристический граф $\Phi = (A; E)$, где $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – множество вершин, $E$ – множество взвешенных ребер $e_{j1j2}$. Рассмотрим методику интерактивной оптимизационной кортеж-декомпозиции.

Для поиска декомпозиции (разбиения, разрезания) графа можно было бы использовать существующие алгоритмы [1-3]. Однако, за редким исключением [7, 8, 9] в большинстве существующих алгоритмов выбор подграфов $\Phi_i$ производится, как правило, случайно, по крайней мере, на первых шагах алгоритмов. Здесь же в силу комбинаторно большого числа потенциальных декомпозиций графов необходим метод направленного "неслучайного" формирования подграфов с предварительной и максимально простой возможностью оценки результатов декомпозиции (например, числа подграфов, числа внутренних и межграфовых связей каждого подграфа, общего числа взаимных связей, максимального числа внутренних и межграфовых связей при определенной декомпозиции данного графа и т.д.) еще на абстрактном уровне. Предлагаемый метод позволяет вычислять подобные оценки, причем вычислять их заранее без выполнения процедуры декомпозиции как таковой.

Суть предлагаемого метода состоит в последовательном выполнении трех этапов. На первом этапе формируется кортеж вершин графа $\Phi$ с таким размещением вершин, при котором вершины с большим числом связей между собой размещаются в кортеже по соседству, а несвязанные или слабо связанные вершины – в отдаленных друг от друга позициях кортежа. На втором этапе по матрице смежности $C$ графа $\Phi$, порядок вершин в которой совпадает с найденным кортежем, строится матрица интервалов C". На третьем этапе по матрице интервалов строится функция связи $N_{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, по которой можно непосредственно производить декомпозицию.

Остановимся на некоторых определениях и допущениях. Условимся под суммарной длиной $L$ связей кортежа (линейного размещения) $\Gamma = \langle a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in} \rangle$ вершин графа $\Phi$ понимать сумму длин $l_\nu$ всех ребер, где под длиной $l_\nu$ ребра, соединяющего вершины $a_{j1}$ и $a_{j2}$ , понимается разность их порядковых номеров ($j_2 - j_1$) в кортеже, умноженная на вес ребра. Очевидно, что в общем случае различные кортежи $\Gamma_p$, $p = 1, 2, \ldots, n!$ вершин одного и того же графа $\Phi$ имеют различную суммарную длину связей $L_p$. Пусть подграфы $\Phi_i$ получаются из заданного кортежа последовательным выделением соответствующего числа подряд стоящих вершин (рис. 1).

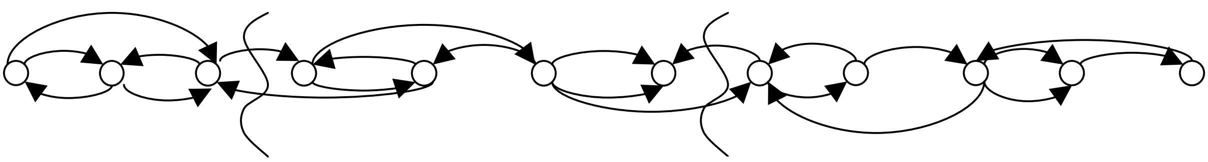


Рис. 1. Разрезание графа в позициях $j_1$ и $j_2$

Такой метод декомпозиции назовем кортеж-декомпозицией графа $\Phi$. Нетрудно подсчитать, что число различных вариантов кортеж-декомпозиций кортежа $\Gamma_p$ графа $\Phi$ на $m$ подграфов не превышает числа перестановок из $m$ в $m!$.

Экспериментальным путем установлено, что кортежу вершин с минимальной или близкой к минимальной суммарной длиной связей $L_{\min}$, как правило, соответствует кортеж-декомпозиция графа $\Phi$ на подграфы с меньшим суммарным числом связей $N_{min}$ между подграфами, чем для кортежей с большей суммарной данной связей $L > L_{\min}$.

Эксперименты, выполненные на ЭВМ и вручную для ряда практических примеров графов причинно-следственных связей, показали, что суммарное число $N = \sum_{i=1}^{m} N_i$ связей между подграфами при кортеж-декомпозиции графа $\Phi$ возрастает, если для нового кортежа графа $\Phi$ возрастает суммарная длина связей $L_p$, т.е. если при кортеж-декомпозиции для кортежа $\Gamma_{i1}$ имеем суммарные длину и число связей $L_{i1}$ и $N_{i2}$, а для $\Gamma_{i2}$ – соответственно $L_{i2}$ и $N_{i2}$, причем $L_{i2} > L_{i1}$, то, как правило $N_{i2} \rangle N_{i1}$, причём, при $L_{i2} \rangle\rangle L_{i1}$ вероятность этого утверждения становится практически равной единице.

Аналогично ведет себя зависимость максимального суммарного веса $в_{mi}$ всех связей подграфа $\Phi_i$ с остальными подграфами, т.е. если $L_{i2} \rangle L_{i1}$, то, как правило, $в_{mi1} > в_{mi}$.

Например, при кортеж-декомпозиции различных кортежей вершин графа $\Phi$ корреляция между $\sum_{i=1}^{3} N_i$ и $b_m$ показана на рис. 2.

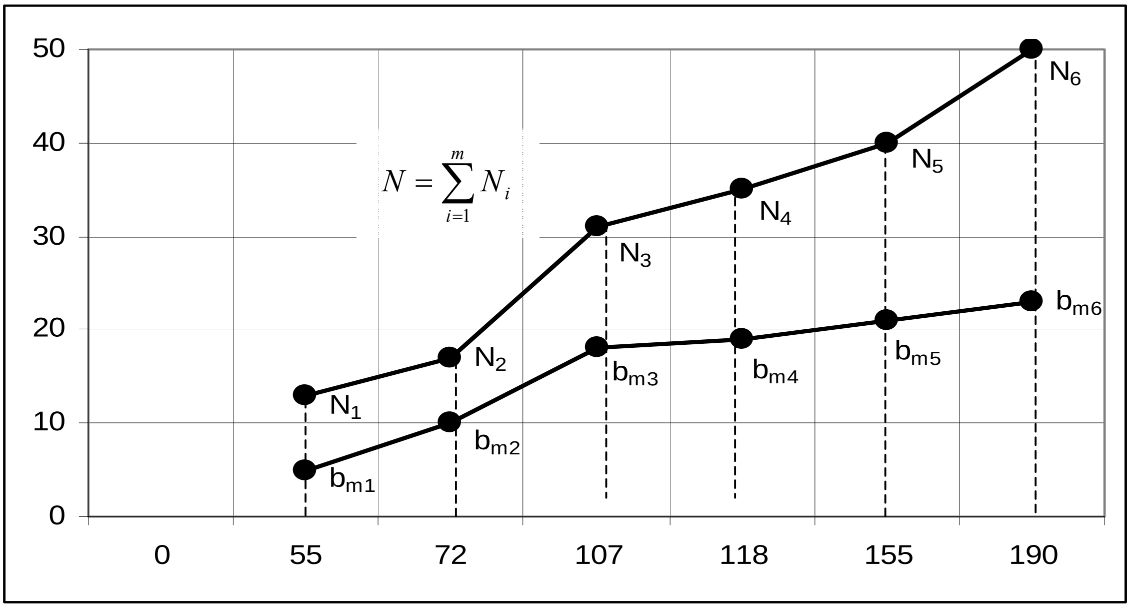


Рис. 2. Корреляция вершин $\sum N_i$ и $b_{mi}$

Здесь $\sum_{i=1}^{3} N_i$ суммарное число связей между подграфами при декомпозиции графа на 3 подграфа с числом вершин в каждом $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, $n_3 = 6$, $в_m$ – максимальный суммарный вес взаимных связей подграфа $\Phi_i$, $i = 1, 2, 3$ с остальными, а вес каждого ребра принят равным 1.

Перейдем к рассмотрению каждого этапа в отдельности.

## Алгоритм формирования кортежа вершин графа

Алгоритм нахождения кортежа вершин графа $\Phi$ является приближенным и имеет циклический характер. Число циклов равно числу $n$ вершин графа. На каждом $r$ цикле выбирается и отмечается индексом $r$ одна из неотмеченных вершин. Определим критерий выбора вершины на $r$ цикле алгоритма. Обозначим подграф, содержащий только отмеченные вершины, – $D_1^r$, а подграф, содержащий неотмеченные – $D_2^r$ (рис. 3).

Из $D_2^r$ выделим вершину $a_i$, связанную непосредственно с одной или несколькими вершинами подграфа $D_1^r$. Обозначим число дуг, связывающих $a_i$ с $D_1^{r-1}$, через $\xi_{1i}^r$, а число дуг, связывающих $a_i$ с $D_2^r$, через $\xi_{2i}^r$. При выборе $r$ компоненты картежа на $r$ цикле алгоритма отыскивается такая вершина $a_i^r$ для которой $\xi_{1i}^r - \xi_{2i}^r = \delta_{i\max}^r$.

В этом случае справедливо утверждение 1, которое приведем без доказательства в силу его простоты.

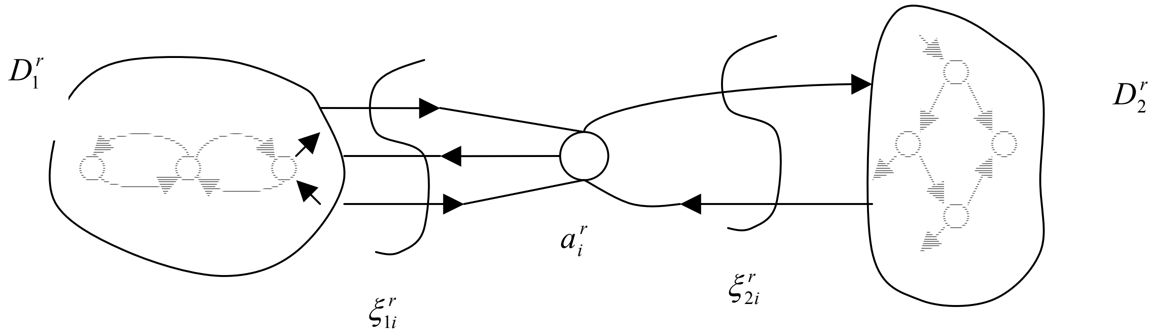


Рис. 3. Иллюстрация к выбору вершины $a_i$ на $r$-м цикле алгоритма

**Утверждение 1.**

Если при формировании кортежа на $r$ цикле алгоритма в качестве очередной компоненты кортежа выбирается вершина $a_i$ с $\delta_{i\max}^r$, то число связей $N_j^r$ между подграфами $D_1^{r-1}$ и $D_2^{r-1}$ будет локально уменьшаться на максимально возможную величину при $\delta_{i\max}^r$ положительном и локально увеличиваться на минимально возможную величину при $\delta_{i\max}^r$ отрицательном.

На основании данного утверждения сформулируем алгоритм нахождения кортежа вершин графа с сокращенной суммарной длиной связей.

**Алгоритм 1.**

1. Из множества вершин $A$ выбираем вершину $a_i$ с $\delta^r_{i\,max}$, где $r = 0, D^0_1 = \varnothing$ $\xi^0_{1i} = 0$, отмечаем ее индексом $r = 0$ и переходим к 2.

2. Для каждой неотмеченной вершины $a_i$, инцидентной множеству вершин $D^r_i$ определяем число $\xi^r_i$ и выбираем вершину с максимальным числом $\xi^r_i$. Отмечаем ее индексом $r$. Если $n - r > 1$ – переход к 3, если $n - r = 1$ – переход к 4.

3. Если множество $D^r_2$ содержит неотмеченные вершины – переход к 2, в противном случае – к 1.

4. Неотмеченную вершину отмечаем индексом $r + 1$, переходим к 5.

5. Конец работы алгоритма.

Расположив вершины $a_i \in A$ графа $\Phi$ по возрастанию их отметок $r$, нетрудно получить искомый кортеж с минимизированной суммарной длиной связей $\Gamma_m = <a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}>$ а также матрицу смежности $C'$, порядок вершин в которой совпадает с найденным кортежем.

## Построение функции связи и интерактивной процедуры кортеж-декомпозиции

На втором этапе кортеж-декомпозиции по оптимизированной матрице смежности $C'$ графа $\Phi$ строится матрица интервалов. $C'' = \|C''_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Ее элементы $C_{ij}$ вычисляются по матрице $C'$ в соответствии с выражением

$$C''_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{j} C'_{ik}, \text{ при } i > j, \\ \sum\limits_{k=j}^{n} C'_{ik}, \text{ при } i \le j. \end{cases} \qquad (1)$$

Обозначим число связей между подграфом $\Phi_1$, который содержит первые $j$ вершин кортежа $\Gamma_m$, и подграфом $\Phi_2$, содержащим остальные $(n - j)$ вершин, через $N_{(j)}$.

**Утверждение 2.**

Суммарное число связей между подграфами $\Phi_1$ и $\Phi_2$ при кортеж-декомпозиции в точке $j$ определяется выражением $N_{(j)} = \sum_{i=1}^{n} C''_{ij}$.

Доказательство. Рассмотрим элемент $C''_{ij}$ матрицы $C''$. Поскольку он равен сумме чисел $C_{ik}$, $k = j, j+1,...,n$, то это значит, что вершина $a_i$ подграфа $\Phi_1$ (подграф $\Phi_1$ содержит вершины $a_1, a_2, \ldots, a_i$. А так как $i \le j$, то $a_i \in \Phi_1$) имеет общее число дуг, выходящих из $a_i$ в подграф $\Phi_2$, равное $C''_{ij}$.

Просуммировав числа $C''_{ij}$ для всех $i = 1, 2, ..., j$, получим тем самым число дуг, выходящих из всех вершин $a_i$ подграфа $\Phi_1$ в подграф $\Phi_2$. Просуммировав две полученные величины, получим $N_{(J)}$. Утверждение доказано.

Таким образом, по матрице интервалов $C''$ нетрудно построить дискретную функцию связи $N_{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, значение которой в точке $j$ дает число связей между соответствующий подграфами $\Phi_1$, $\Phi_2$.

Пусть подграф $\Phi_2 = (A_2, F_2)$ образован сечениями кортежа в точках $j_1, j_2$, причем $A_2 = \{a_{j1+1}, a_{j1+2}, ..., a_{j2}\}$. Тогда число связей $N_{j1}(j_2)$ подграфа $\Phi_2$ со всеми остальными можно определить согласно следующему утверждению.

**Утверждение 3.**

$$N_{j1}(j_2) = N_{(j_1)} + N_{(j_2)} - 2\Delta j_1 j_2, \qquad (2)$$

где $\Delta j_1 j_2 = \sum_{i=j_2}^{n} \sum_{j=1}^{j_1} C'_{ij} + \sum_{i=1}^{j_1} \sum_{j=j_2}^{n} C'_{ij}$

Доказательство следует из того, что величина $\Delta j_1 j_2$, определяемая по матрице $C''$, равна числу связей только между подграфами $\Phi_1$ и $\Phi_3$.

В том случае, когда подграф $\Phi_1$ сформирован и отделен от графа $\Phi$, то меняя значения $j_2$ от $j_1+1$ до $n$ и вычисляя значения $N_{j1}(j_2)$ согласно (3.10), мы получим функцию $N_{j1}$(j), в которой учтено отделение первых $j_1$ вершин кортежа. Любое значение функции $N_{j1}(j)$ дает число связей между подграфом $\Phi_2$ и всеми остальными подграфами. Следует отметить, что при $j_1 = 0$ получим $N_{j1}(j) = N_{j0}(j) = N(j)$, так как W(0) = 0 и $\Delta 0 j = 0$.

Кроме функции $N(j)$ для кортеж-декомпозиции графа вычисляется также дискретная функция $N'(j)$, характеризующая суммарное число внутренних и внешних связей графа. Функция $N'(j)$ вычисляется с помощью выражения

$$N'(j) = \sum_{i=1}^{j} N_i,$$

где $N_i$ – суммарный вес вершин и дуг, выходящих из вершины $a_i$ в другие вершины,

$$N_i = N_{oi} + N_{1i} = \sum_{j=1}^{n} C'_{ij} + C'_{ii} .$$

При кортеж-декомпозиции графа $\Phi$ суммарный вес $N'_i$ подграфа $\Phi_i$, образованного сечением кортежа в точках $j_1, j_2$, определяется выражением $N'_i = N'(j_2) - N'(j_1)$ и равен сумме числа внутренних связей подграфа $\varsigma_i$ и числа ребер, выходящих из подграфа $\varsigma_i$ в другие. По функциям $N(j)$ и $N'(j)$ можно вычислять и остальные оценки, используемые при анализе и сравнении различных вариантов декомпозиции. Таким образом, задавая различные точки сечения картежа вершин графа, можно заранее, не выполняя декомпозицию графа как таковую, вычислять число внутренних и взаимных связей каждого подграфа, общее число внутренних и взаимных связей всех подграфов, оценивать и сравнивать максимальное число взаимных связей и т.д.

Локальные минимумы функции $N(j)$ указывают на наиболее предпочтительные области сечения кортежа, которые будут давать минимизированное число связей между подграфами, образованными этими сечениями. Поэтому в том случае, если число подграфов не задано, по минимумам функции $N(j)$ можно выбрать точки сечения и осуществить такое разбиение, при котором достигается минимальное или близкое к нему число связей.

Необходимо заметить, что реализовать предложенный подход к оптимизации декомпозиции графов на сеть подграфов по графу причинно-следственных связей можно с помощью различных алгоритмов. Выбор того или иного алгоритма зависит от конкретной постановки задачи. На рис. 4, например, изображены возможные области сечения кортежа вершин графа $\Phi$ (эти области заштрихованы) при оптимизации декомпозиции графа с заданным ограничением на число взаимных связей $N_{i\,max}$ между подграфами.

При декомпозиции графа на сеть автономно описываемых графов последние можно получать в соответствии с последовательным формированием подграфов $\Phi_1$, $\Phi_2$, …, $\Phi_m$ путем поочередного сечения кортежа вершин в точках $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$ по минимумам функции $N(j)$ с пошаговой проверкой условия $N_i \le N_{imax}$. Метод кортеж-декомпозиции позволяет варьировать как числом вершин в каждом подграфе, так и числом взаимных связей между подграфами с учетом конкретной структуры графа, и, следовательно, структуры и числа связей между подграфами.

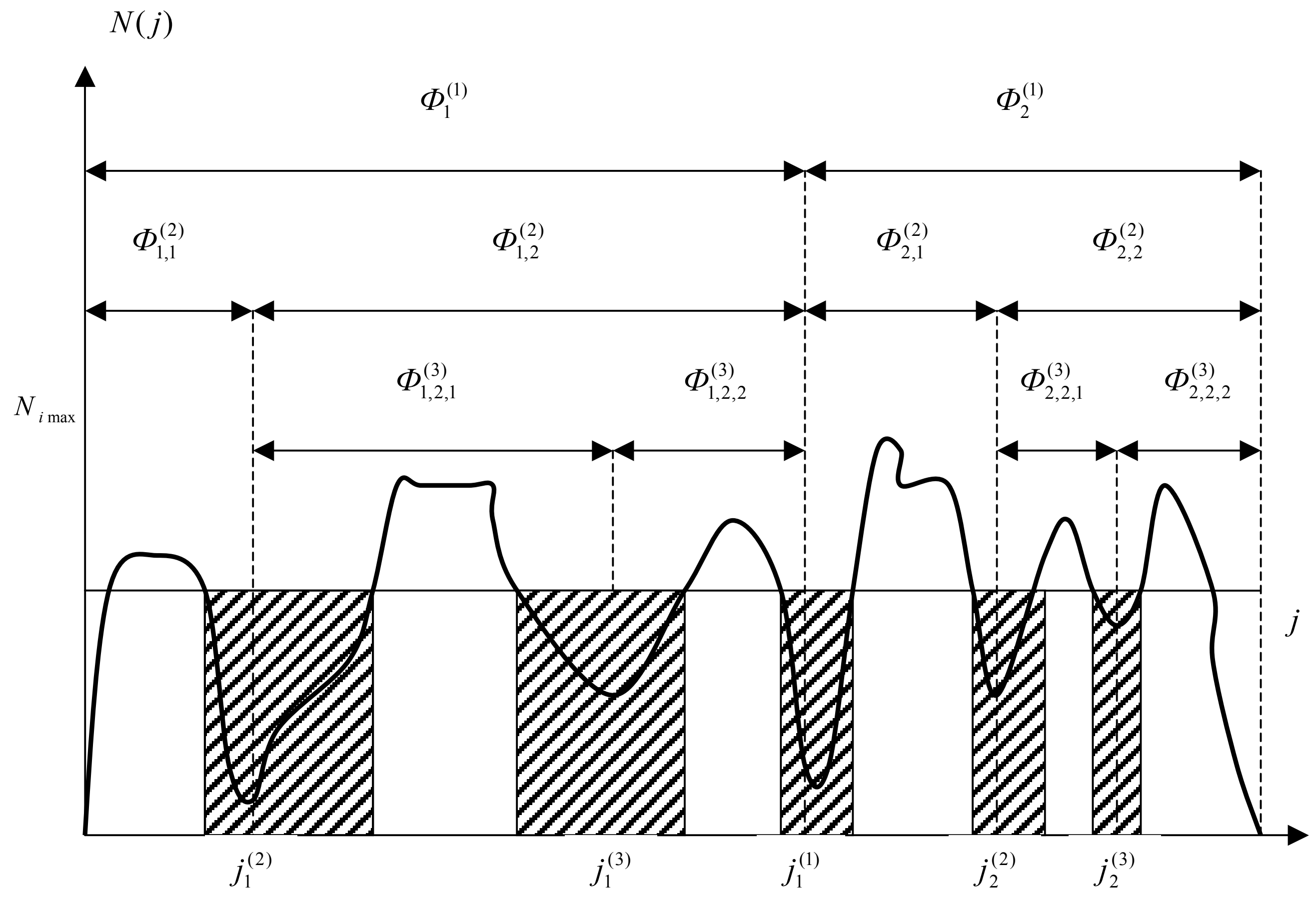


Рис. 4. Области сечений графа $\Phi$ при кортеж-декомпозиции

Метод кортеж-декомпозиции удобен для организации интерактивной диалоговой процедуры декомпозиции в системе "человек-ЭВМ". В этом случае рутинная работа по формированию оптимального кортежа вершин графа $\Phi$, вычислению функций $N(j)$ и $N'(j)$ и других характеристик того или иного варианта декомпозиции может выполняться на ЭВМ, а выбор точек сечения кортежа, анализ и сравнение вариантов декомпозиции полностью или частично может выполнять проектировщик. ЭВМ может выводить графическое изображение функций $N(j)$ и $N'(j)$ на экран дисплея, либо распечатывать их дискретные значения. Исследователь в зависимости от вида конкретной функции $N(j)$ по ее локальным минимумам может выбрать поочередно или одновременно точки сечения кортежа и ввести эту информацию в ЭВМ, которая вычисляет требуемые характеристики и сообщает их исследователю. Анализируя выведенную из ЭВМ информацию, он либо изменяет набор точек сечения кортежа и повторяет цикл кортеж-декомпозиции, либо приступает к непосредственной декомпозиции графа на сеть подграфов, уже имея заранее ряд важнейших характеристик предстоящей декомпозиции.

Очевидно, что для графов большой размерности язык матриц неудобен и громоздок. Поэтому машинные программы кортеж-декомпозиции составлены для списковых представлений графов. Программы на ЭВМ позволяют обрабатывать графы с числом вершин до нескольких тысяч и числом ребер до нескольких десятков тысяч.

### Алгоритм оптимальной кортеж-декомпозиции

Рассмотрим одну из задач оптимальной кортеж-декомпозиции, заключающуюся в декомпозиции графа $\varsigma$ на $m$ автономно описываемых подграфов $\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_m$ так, чтобы число ребер в каждом подграфе не превышало $N_{imax}$ и чтобы максимальное число ребер, связывающих подграф $\varsigma_i, i = 1, 2,..., m$ с остальными, было минимальным из всех возможных кортеж-декомпозиций. В этом случае граф $\Phi$ требуется декомпозировать на подграфы $\Phi_1$, $\Phi_2$, …, $\Phi_m$ с множествами вершин $A_1, A_2, ..., A_m, \bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$ так, чтобы для каждого подграфа $\Phi_i$ выполнялось условие $N_i \le N_{imax}$, где $N_i$ – число связей внутри подграфа $\Phi_i$, а максимальное число связей $b_m = \max_i b_i,\ i = 1, 2, ..., m$ одного подграфа с остальными было бы минимальным из всех возможных для кортежа вершин графа с минимальной длиной связей $L_{min}$. Поскольку ориентация ребер не влияет на количество связей между вершинами графа, здесь будем считать граф $\Phi$ неориентированным.

Пусть задан кортеж вершин $\Gamma = \langle a_1, a_2, …, a_n \rangle$ с $L_{min}$ графа $\Phi$ и соответствующая ему треугольная матрица смежности $C = \left\| C_{rj} \right\|, r, j = 1, 2,..., n$, где $C_{rj}$ равно числу ребер между вершинами $a_r$ и $a_j$. Вначале будем считать, что все веса вершин равны 0. Кортеж-декомпозицию будем выполнять по таблице связей, $B = \left\| b_{ij} \right\|, i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n,$ которая строится по матрице смежности $C$. Число строк этой таблицы равно числу $m$ подграфов, а число столбцов – числу $n$ вершин графа $\Phi$. Элемент $b_{ij}$, стоящий в $i$-й строке и $j$-м столбце таблицы $B$, полагается равным числу связей подграфа $\Phi_i$, образованного $n_i$ ($n_i$ получено в результате кортеж-декомпозиции) подряд стоящими в кортеже вершинами графа, начиная с вершины $a_i$ и кончая вершиной $a_{i+n_{i-1}}$, со всеми остальными подграфами. Элементы такой таблицы вычисляются по матрице $C$ следующим образом:

$$b_{ij} = \sum_{i=j}^{j+n_i-1} \Big( \sum_{r=1}^{j-1} C_{ri} + \sum_{r=j+n_i}^{n} C_{rj} \Big), \tag{3}$$

если $\exists \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \rangle \, [\, j-1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i n_i \,]$ истинно;

$b_{ij} = \infty$ в противном случае, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$.

Предикат, стоящий в выражении (3), означает существование кортеж-декомпозиции графа *Φ*, если в подграф $Φ_i$, включены подряд стоящие вершины $a_i, a_{i+1}, ..., a_{i+n_{i-1}}$.

**Пример.**

Пусть граф *Φ* задан матрицей

$$C = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 1 & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 2 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & 2 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & 2 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & 1 & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & 2 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & & 2 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & 2 & & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 
\end{array} \right\| \end{array}$$

Таблица *B*, построенная по правилу (3) для $m = 3$, $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, имеет вид

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{array} \\
B = \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} & \left| \begin{array}{ccccccccccccccc}
6 & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty \\
4 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
6 & \infty & \infty & \infty & 10 & 6 & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty
\end{array} \right|
\end{array}
$$

Горизонтальными отрезками из множества отрезков $V = \{V_1, V_2, ..., V_m\}$ в каждой $i$ строке таблиц $B$ один раз вычеркнем $n_i$ подряд стоящих элементов $b_{ij}, b_{i(j+1)}, ..., b_{i(j+n_i-1)}$ так, чтобы каждый из этих отрезков начинался с элемента $b_{ij} \neq \infty$ и в каждой строке был только один отрезок $V_i \in V$. Пусть эти отрезки проектируется на горизонтальную ось без пересечений и просветов (см. табл. $B$). Такое вычеркивание элементов таблицы отрезками $V_i$ будем называть покрытием таблицы $B$.

**Утверждение 4.**

Покрытие таблицы $B$ отрезками $V_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ определяет кортеж-декомпозицию графа $\Phi$ на $m$ подграфов.

Доказательство. Пусть в каждой $i$ строке вычеркнуто $n_i$ подряд стоящих элементов. Это соответствует образованию подграфа $\Phi_i$, состоящего из вершин, отмечающих столбцы с вычеркнутыми элементами. Так как вычеркивающие отрезки проектируются на горизонтальную ось без пересечений и просветов, то это означает принадлежность каждой вершины кортежа одному и только одному подграфу. Следовательно, утверждение справедливо.

Число покрытий таблицы $B$ отрезками $V_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, равно $m!$, так как число кортеж-декомпозиций заданного кортежа равно $m!$. Требуется найти из $m!$ вариантов покрытий таблицы оптимальный, т.е. такой, чтобы элементы $b_{ij}$, с которых начинается вычеркивание, были бы не больше минимально возможного для заданного кортежа $\Gamma$ максимального числа $b_m$ внешних связей подграфов. Это значит, что если в таблице $B$ все элементы $b_{ij}$, которые больше величины $b_m$, приравнять $b_{ij} = \infty$, то покрытие таблицы $B$ существует. Если же в таблице $B$ приравнять $b_{ij} = \infty$ все элементы $b_{ij}$, которые больше величины $b_m - 1$, то покрытие таблицы $B$ не существует. Другими словами, существует покрытие, при котором отрезки $V_i$, начинаются с элементов $b_{ij} \leq b_m$ и покрытие не существует при условии, если отрезки $V_i$ начинаются с элементов $b_{ij} < b_m$. Таким образом, задача заключается в том, чтобы определить минимально возможное число $b_m$ и соответствующее ему покрытие и тем самым оптимальную кортеж- декомпозицию графа $\Phi$.

**Утверждение 5.**

Минимально возможное максимальное число связей $b_m$ подграфа $\Phi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, при кортеж-декомпозиции графа $\Phi$ на подграфы $\Phi_i$ заключено в пределах

$$\max_i \min_j b_{ij} \le b_m \langle\langle \max_{ij} b_{ij} . \quad (4)$$

***Доказательство.***

Верхняя граница для числа $b_m$ очевидна, так как в таблице $B$ нет элемента, превышающего $\max_{ij} b_{ij}$. С другой стороны, число $b_m$ не может быть меньше числа $\max_i \min_j b_{ij}$, так как в противном случае всегда найдется строка $i$, в которой все элементы превышают величину, стоящую в левой части выражения (4), поэтому в этой строке нельзя произвести вычеркивание, начиная с элемента $b_{ij} < \max_i \min_j b_{ij}$ и, следовательно, нельзя построить хотя бы одно покрытие таблицы. Утверждение доказано.

Задачу поиска $b_m$ из заданного утверждением 4 интервала можно трактовать как задачу сужения интервала неопределенности при поиске экстремума [10] .

Естественным и наиболее распространенным на практике является метод дихотомии, или метод поиска экстремума путем последовательного деления интервала неопределенности пополам. Используя метод дихотомии, можно найти решение за $r$ шагов, где

$$r = \left] \log_2 (\max_{i,j} b_{ij} - \max_i \min_j b_{ij}) \right[ .$$

Практическое использование алгоритма показало, что для графов, отображающих конкретные пожарно-спасательные службы, обычно значение $b_m$ лежит в начале интервала. Поэтому можно с достаточной степенью эффективности применять пассивный метод последовательного поиска, начиная с $b_p = \max_i \min_j b_{ij}$ с последующим увеличением $b_p$ на единицу при отсутствии покрытия.

Будем полагать, что на каждом $P$ шаге мы имеет таблицу $B_p$, которая получается из исходной таблицы $B$ заменой ее элементов, превышающих текущее значение $b_p$ на $\infty$. Сформулируем циклический алгоритм поиска оптимального покрытия таблицы.

1. Полагаем $P = 1$ , $b_p = \max_i \min_j b_{ij}$, переходим к 2.

2. Находим покрытие таблицы $B_p$. Если оно существует, то переходим к 4, в противном случае – к 3.

3. Увеличиваем номер цикла $P$ и число $b_p$ на единицу. Переходим к 2.

4. Строим кортеж-декомпозицию графа $\Phi$ на подграфы $\Phi_1$, $\Phi_2$, …, $\Phi_m$ в соответствии с найденным оптимальным покрытием, т.е. с минимальной для данного кортежа величиной $b_m$.

Ранее предполагалось, что вес каждой вершины равен 0. При различных весах вершин необходимо строить таблицу $B'$, отличающуюся от таблицы $B$. В таблице $B'$ каждая $i$ строка отмечается максимально допустимой суммой $N_{i\,max}^{B}$ весов вершин, входящих в подграф $\Phi_i$. Каждый элемент таблицы $B'$ содержит два числа: $b_{ij}$ и $n_{ij}$. Первое равно числу внешних связей подграфа $\Phi_i$, образованного $n_i$ подряд стоящими в кортеже вершинами, начиная с $a_j$ и кончая $a_{j+n_i-1}$, причем сумма их весов не превышает допустимого веса $N_{i\,max}^{B}$, но максимально к нему приближается. Для заданного кортежа вершин графа $\Phi$ введем функцию весов $N^B(j)$, равную суммарному весу первых $j$ вершин кортежа $N^B(j) = \sum_{r=1}^{j} N_r$ .

Тогда из таблицы $B'$ находим $m_{ij} = j_1 - j$, где $j_1$ определяется из выражения

$$N^B(j_1 - 1) \le N^B(j-1) + N_{i\partial on}^{B} < N^B(j_1). \quad (5)$$

Число $b_{ij}$, равное числу связей выделяемого из кортежа подграфа $\Phi_i$ с весом $N_i^B \le N_{i\,max}^{B}$, вычисляется по (4). Построив таблицу $B'$, можно найти оптимальное покрытие по описанной ранее методике. Отличие будет только в том, что длина вычеркивающих отрезков будет зависеть не только от номера строки $i$, но и от номера столбца $j$, и будет равна $m_{ij}$.

Литература


1. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С. Операции над гиперграфами и их свойства. - Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 4. – С. 142-149.

2. Berge C. Graphs et hypergraphs. – Paris: Dunod, 1970, XVIII. – P. 373-473.

3. Шиханович Ю.А. Введение в современную математику. - М.: Наука, 1965. - 376 с.

4. Малюгин Д.В. О полиномиальной реализации кортежа булевых функций. – ДАН СССР, 1982, №66, том 265. – С. 1338-1341.

5. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Курейчик В.М. Применение графов для проектирования дискретных устройств. - М.: Наука, 1974.

6. Kernighan B.W. Optimal sequential partitions of graphs. – J. Assoc. Comput Mach., 1971, 18, № 1.

7. Баранов С.И. Синев В.Н. Программируемые логические матрицы в цифровых системах (обзор). – Зарубежная радиоэлектроника, 1979, №1. – С. 65-81.

8. Баранов С.И. Синев В.Н. Синтез автоматов на программируемых логических матрицах. – Управляющие системы и машины, 1979, № 2. – С. 58-64.

9. Максименков А.В. Машинное проектирование модулей на больших интегральных схемах. – Электронная промышленность, 1971, № 2.

10. Яблонский С.В., Лупанов О.Б. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Том 1, М., Наука, 1974. – 312 с.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 21 августа 2009 г.