

Н.Г. Топольский<sup>1</sup>, Г.Б. Трефилов<sup>2</sup>, Сатин А.П.<sup>1</sup>  
(<sup>1</sup>Академия Государственной противопожарной службы МЧС России,  
<sup>2</sup>Московский государственный строительный университет;  
e-mail: info@academygps.ru)

## АЛГОРИТМЫ МНОГОУРОВНЕВОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ГИПЕРГРАФОВЫХ И ГРАФОВЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ В АСУ БЕЗОПАСНОСТЬЮ КРИТИЧЕСКИ ВАЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Для анализа гиперграфовых и графовых моделей причинно-следственных связей с большим числом вершин и ребер предложена методика многоуровневой иерархической декомпозиции, позволяющая снизить размерность анализируемых моделей и выполнить их анализ по частям. В рамках метода предложены различные виды иерархической декомпозиции гиперграфовых моделей на подгиперграфы с сосредоточенными, распределенными и комбинированными связями. Построены формализованные процедуры декомпозиции по матрицам инцидентий гиперграфов и их списковым эквивалентам, что существенно важно для гиперграфов большой размерности и для машинной реализации процедур декомпозиции.

Ключевые слова: безопасность, критически важные объекты, автоматизация, декомпозиция.

N.G. Topolskiy, G.B. Trefilov, A.P. Satin

## ALGORITHMS MULTILEVEL HIERARCHICAL DECOMPOSITION HYPER GRAPH AND GRAPH MODELS OF RELATIONSHIPS OF CAUSE AND EFFECT IN THE MANAGEMENT INFORMATION SYSTEM SAFETY OF CRUCIAL OBJECTS

For the analysis hyper graph and graph models relationships of cause and effect with greater a number of tops and edges the technique of the multilevel hierarchical decomposition, allowing to lower dimension of analyzed models and you-make look fat their analysis in parts is offered. Within the limits of a method various kinds hierarchical are offered to decomposition hyper graph models on partial hyper graph with concentrated, the distributed and combined communications. The formalized procedures of decomposition on matrixes incidence hyper graph and to their list equivalents that is essentially important for hyper graph the big dimension and for machine realization of procedures of decomposition are constructed.

Key words: safety, critically the important objects, automation, decomposition.

## Виды многоуровневой иерархической декомпозиции

Рассмотрим единый подход к решению задачи декомпозиции гиперграфов причинно-следственных связей, заключающийся в их недекартовой многоуровневой иерархической декомпозиции. Метод иерархической декомпозиции будем излагать на языке гиперграфов по той причине, что гиперграф удачно сочетает в себе возможности моделировать на определенном уровне абстракции самые разные системы, в том числе графы, включая графы причинно-следственных связей [1].

Пусть задан гиперграф  $F = (Q, P)$  [3], где  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  – множество вершин графа  $F$ ,  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$  – множество ребер гиперграфа, причём  $P_j = \{q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{ig}\}, j = 1, 2, \dots, r, 1 \leq g \leq m$ .

Рассмотрим постановку задачи декомпозиции гиперграфа  $F = (Q, P)$  на подгиперграфы в общем случае. Пусть каждая вершина  $q \in Q$  имеет вес  $\beta$ , а каждое ребро  $P$  – вес  $\gamma$ . Требуется осуществить декомпозицию гиперграфа  $F$  на подгиперграфы  $F_1, F_2, \dots, F_m$  (где  $Q_{j1} \cap Q_{j2} = \emptyset, \bigcup_{j=1}^m Q_j = Q$ ) с уче-

том комплексного ограничения  $R_1 \leq N_1 \sum_{i \in I} \beta_i + N_2 \sum_{i_1 \in I} \sum_{i_2 \in I} \gamma_{i_1 i_2} \leq R_2$  по крите-

рию суммарного веса  $\Gamma$  ребер, соединяющих вершины различных подгиперграфов, где  $I$  – множество индексов вершин подгиперграфа  $F_i$ ;  $N_1, N_2$  – коэффициенты пропорциональности, причём  $\Gamma = \sum_{j_1 \in J_{i1}} \sum_{j_2 \in J_{i2}} \gamma_{j_1 j_2}, i_1, i_2 \in I, i_1 \neq i_2$ .

Рассмотрим общую постановку задачи иерархической декомпозиции, не рассматривая проблему оптимизации. Проанализируем случаи, когда сложность  $N_i$  каждого подгиперграфа  $F_i$ , полученного в результате декомпозиции, не будет превышать сложности  $N$  исходного гиперграфа  $F$ . Предложенную задачу предлагается решить при помощи следующих видов иерархической декомпозиции:

- иерархическая декомпозиция гиперграфа на подгиперграфы с сосредоточенными связями;
- иерархическая декомпозиция гиперграфа на подгиперграфы с распределенными связями;
- комбинированная иерархическая декомпозиция гиперграфа (т.е. с сосредоточенными и распределенными связями).

В рамках иерархической декомпозиции с распределенными связями различаются, в свою очередь, еще три разновидности: декомпозиция на подгиперграфы с распределенными односторонними входящими, односторонними исходящими и двусторонними связями. Могут быть также раз-

личные комбинации указанных видов иерархической декомпозиции. В настоящей статье рассматриваются, в основном, виды недекартовой декомпозиции, которая не основывается на операциях, обратных прямому произведению множества вершин гиперграфов [1], т.е. множество вершин графа  $F$  образуется из множеств вершин подгиперграфов  $F_i$  аддитивным, а не мультипликативным способом.

### ***Иерархическая декомпозиция гиперграфа на подгиперграфы с сосредоточенными связями***

Для построения иерархической декомпозиции гиперграфовой модели зададим на множестве вершин  $Q$  гиперграфа  $F$  разбиение  $H_1$ , которое назовем разбиением первого уровня иерархии,

$$H_1 = \{Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, \dots, Q_n^{(1)}\}; \quad Q = \bigcup_{i=1}^n Q_i^{(1)}, \quad Q_i^{(1)} \cap Q_j^{(1)} = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Для каждого подгиперграфа  $F_i^{(1)}$  подмножество его ребер  $P_i \subset P$  определим как подмножество множества ребер  $P$  гиперграфа  $F$ , состоящее из ребер, инцидентных только вершинам из подмножества вершин  $Q_i^{(1)}$ .

На подмножестве ребер  $P_{n+1}$  ( $P_{n+1} = P \setminus \bigcup_{i=1}^n P_i$ ) гиперграфа  $F^i$ , не вошедших ни в одно из подмножеств  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , образуем дополнительный  $n + 1$  подгиперграф  $F_{n+1}^{(1)} = (Q_{n+1}^{(1)}, P_{n+1})$ , множеством вершин которого является множество элементов разбиения  $H_1$ .

С целью получения декомпозиции второго уровня иерархии зададим на множестве вершин гиперграфа  $F$  разбиение  $H_2$ , которое назовем разбиением второго уровня иерархии:

$$H_2 = \{Q_1^{(2)}, Q_2^{(2)}, \dots, Q_m^{(2)}\}; \quad Q = \bigcup_{i=1}^m Q_i^{(2)}, \quad Q_i^{(2)} \cap Q_j^{(2)} = \emptyset, \quad m \geq n, \quad j \neq i, \quad \text{причём}$$

$$Q_i^{(1)} = \bigcup_{j=1}^{k_i} Q_j^{(2)}, \quad k_i = 1, 2, \dots, n.$$

Чтобы не проводить вновь процедуры декомпозиции всего гиперграфа  $F$  на  $m$  подгиперграфов с образованием дополнительного  $(m + 1)$ -го подгиперграфа, можно провести аналогичную процедуру разбиения для всех тех подгиперграфов  $F_i^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , у которых

$$Q_i^{(1)} = \bigcup_{j=1}^{k_i} Q_j^{(2)}, \quad k_i = 2, 3, \dots, m, \quad \text{т.е. подгиперграфов } F_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \text{у кото-}$$

рых  $Q_i^{(2)} = Q_j^{(1)}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ , как легко видеть, не изменяются, т.е.  $F_i^{(2)} = F_j^{(1)}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ . Иерархическую процедуру декомпозиции гиперграфа можно проводить и для дополнительного  $n + 1$  подгиперграфа  $F_{n+1}^{(i)}$ .

Процесс иерархической декомпозиции с сосредоточенными связями рассмотрим на примере гиперграфа  $F$ , матрица инциденций  $R$  которого имеет вид:

$$R = \begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 & P_{10} \\ \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{matrix}$$

Для 1-го уровня иерархии зададим разбиение  $H_1 = \{Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}\}$ ,  $Q_1^{(1)} = \{q_1, q_4, q_9\}$ ,  $Q_2^{(1)} = \{q_2, q_3, q_5, q_6\}$ ,  $Q_3^{(1)} = \{q_7, q_8\}$  (места сечений гиперграфа  $F_1$  в соответствии с разбиением  $H_1$ ). В результате на подмножествах вершин  $Q_i^{(1)}$  имеем подгиперграфы  $F_i^{(1)} = (Q_i^{(1)}, P_1), i = 1, 2, 3$  и дополнительный подгиперграф взаимосвязей  $F_4^{(1)}$ , матрицы инциденций  $R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, R_3^{(1)}$  и  $R_4^{(1)}$  которых имеют вид:

$$R_1^{(1)} = \begin{matrix} & P_1 & P_2 \\ \begin{matrix} q_1 \\ q_4 \\ q_9 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \end{matrix},$$

$$R_2^{(1)} = \begin{matrix} & P_3 & P_4 & P_5 & P_{10} \\ \begin{matrix} q_2 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_6 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix},$$

$$R_3^{(1)} = \begin{matrix} & P_9 \\ \begin{matrix} q_7 \\ q_8 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \end{matrix},$$

$$R_4^{(1)} = \begin{matrix} & P_6 & P_7 & P_8 \\ \begin{matrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)} \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Как видно из примера, все взаимные связи между подгиперграфами сосредоточены в подгиперграфе взаимосвязей и задаются матрицей инцидентий  $R_4^1$ . Аналогично на множестве вершин  $Q_i^{(1)}, i = 1, 2, 3, 4$  гиперграфа  $F^{(1)}$  можно задать разбиение 2-го уровня иерархии, например,  $H_1 = \{Q_1^{(2)}, Q_2^{(2)}, Q_3^{(2)}, Q_4^{(2)}\}$ ,  $Q_1^{(2)} = Q_1^{(1)}$ ,  $Q_2^{(2)} = \{q_2, q_5\}$ ,  $Q_3^{(2)} = \{q_3, q_6\}$ ,  $Q_4^{(2)} = Q_3^{(1)}$ , причём  $Q_2^{(1)} = Q_2^{(2)} \cup Q_3^{(2)}$ .

В данном случае  $F_1^{(2)} = F_1^{(1)}$ ;  $F_4^{(2)} = F_3^{(1)}$ , а подгиперграф  $F_2^{(1)}$  представляется 2-мя подгиперграфами 2-го уровня иерархии  $F_2^{(2)}$  и  $F_3^{(2)}$  с образованием дополнительного подгиперграфа  $F_5^{(2)}$ . Матрицы инцидентий  $R_2^{(2)}, R_3^{(2)}, R_5^{(2)}$  подгиперграфов  $F_2^{(2)}, F_3^{(2)}$  и  $F_5^{(2)}$  имеют вид

$$R_2^{(2)} = \begin{matrix} & P_4 \\ q_2 & \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \end{matrix}, R_3^{(2)} = \begin{matrix} & P_5 \\ q_3 & \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \end{matrix}, R_5^{(2)} = \begin{matrix} & P_3 & P_{10} \\ \begin{matrix} Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

На рис. 1 представлена графическая схема процесса последовательной двухуровневой иерархической декомпозиции гиперграфа  $F$  на подгиперграфы с сосредоточенными связями.

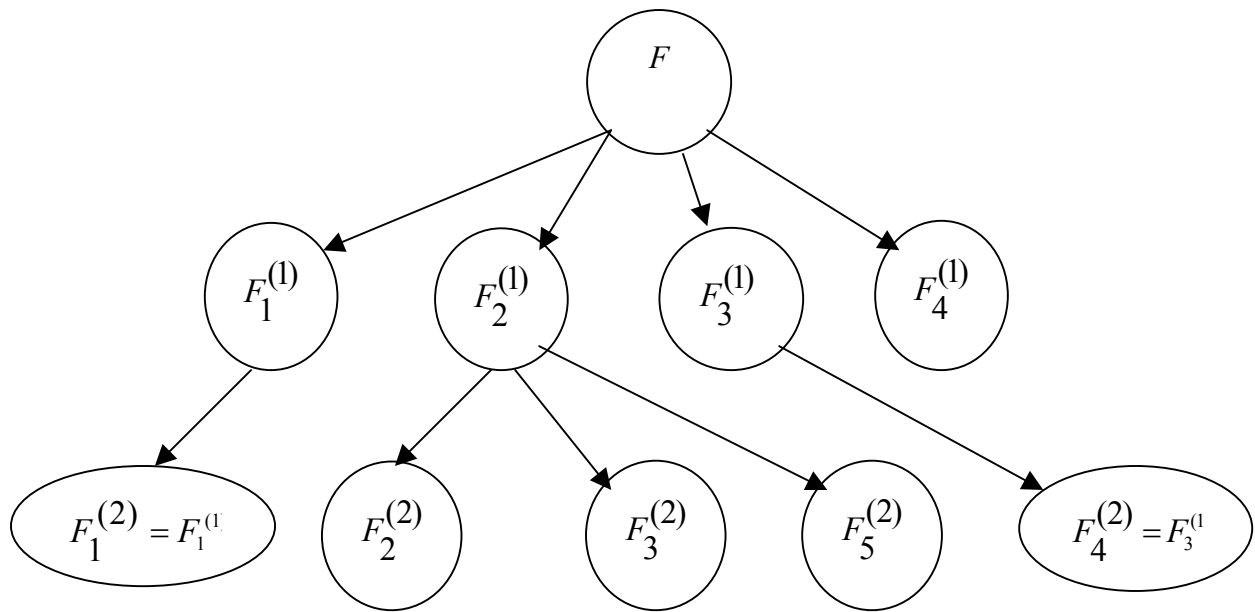


Рис. 1. Схема двухуровневой иерархической декомпозиции гиперграфа  $F$

***Иерархическая декомпозиция неориентированного гиперграфа на подгиперграфы с распределенными связями.***

Отличие данного вида декомпозиции от описанного выше заключается в отсутствии подгиперграфа взаимосвязей  $F_{n+1}^{(i)}$  для каждого уровня иерархической декомпозиции. В этом случае взаимные связи рассредоточены между теми подгиперграфами, которые они непосредственно связывают, а не сосредоточены в одном подгиперграфе, как это было в первом случае.

Иерархическую декомпозицию неориентированного гиперграфа на подгиперграфы с распределенными связями проиллюстрируем на примере гиперграфа  $F$ . С этой целью для  $I$  уровня иерархии задаем то же самое разбиение.

$$H_1 = \{Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}\}, \text{ где } Q_1^{(1)} = \{q_1, q_4, q_9\}, Q_2^{(1)} = \{q_2, q_3, q_5, q_6\}, Q_3^{(1)} = \{q_7, q_8\}.$$

В результате имеем подгиперграфы  $F_i^{(1)} = (Q_i^{(1)}, P_i), i = 1, 2, 3$  с распределенными связями, матрицы инцидентий  $R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, R_3^{(1)}$  которых имеют вид:

$$R_1^{(1)} = \begin{matrix} q_1 \\ q_4 \\ q_6 \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)} \end{matrix} \left\| \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_6 & P_7 & P_8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|, \quad R_2^{(1)} = \begin{matrix} q_2 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_6 \\ Q_1^{(1)} \end{matrix} \left\| \begin{array}{ccccc} P_3 & P_4 & P_5 & P_{10} & P_6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

$$R_3^{(1)} = \begin{matrix} q_7 \\ q_8 \\ Q_1^{(1)} \end{matrix} \left\| \begin{array}{ccc} P_9 & P_7 & P_8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Как видно из примера, все взаимные связи между подгиперграфами распределены между ними и заданы дополнительными строками и столбцами в каждой матрице инцидентий.

Аналогично на множество вершин  $Q_i^{(1)}, i = 1, 2, 3$  гиперграфа  $F^{(1)}$  можно задать разбиение второго уровня иерархии.

Например, представим гиперграф  $F_2^{(1)}$  двумя подгиперграфами 2 уровня иерархии  $F_{2,1}^{(2)}$  и  $F_{2,2}^{(2)}$  так, чтобы  $Q_{2,1}^{(2)} = \{q_2, q_5\}$ ;  $Q_{2,2}^{(2)} = \{q_3, q_6\}$ ;  $Q_{2,1}^{(2)} \cup Q_{2,2}^{(2)} = Q_2^{(1)}$ .

В этом случае матрицы инцидентий подгиперграфов  $F_{2,1}^{(2)}, F_{2,2}^{(2)}$  имеют следующий вид:

$$R_{2,1}^{(2)} = \begin{matrix} q_2 \\ q_5 \\ Q_{2,1}^{(2)} \\ Q_{2,2}^{(2)} \end{matrix} \left\| \begin{array}{ccc} P_3 & P_4 & P_{10} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad R_{2,2}^{(2)} = \begin{matrix} q_3 \\ q_6 \\ Q_{2,1}^{(2)} \end{matrix} \left\| \begin{array}{ccc} P_3 & P_5 & P_{10} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Таким образом, в результате двухуровневой декомпозиции с распределенными связями гиперграф  $F$  представлен четырьмя подгиперграфами  $F_1^{(1)}, F_3^{(1)}, F_{2,1}^{(2)}, F_{2,2}^{(2)}$ .

Здесь  $F_1 = (Q_1^{(1)}, P_1^{(1)})$ ,  $F_3 = (Q_3^{(1)}, P_3^{(1)})$ ,  $F_{2,1}^{(2)} = (Q_{2,1}^{(2)}, P_{2,1}^{(2)})$ ,  $F_{2,2}^{(2)} = (Q_{2,2}^{(2)}, P_{2,2}^{(2)})$ , где  $Q^{(1)} = \{q_1, q_4, q_9\}$ ,  $Q_3^{(1)} = \{q_7, q_8\}$ ,  $Q_{2,1}^{(2)} = \{q_2, q_5\}$ ,

$Q_{2,2}^{(2)} = \{q_3, q_6\}$ ,  $Q_1^{(1)} \cup Q_3^{(1)} \cup Q_{2,1}^{(2)} \cup Q_{2,2}^{(2)} = Q$ , а инцидентор  $P$  задан соответствующими матрицами инциденций  $R_1^{(1)}$ ,  $R_3^{(1)}$ ,  $R_{2,1}^{(2)}$ ,  $R_{2,2}^{(2)}$ .

### **Иерархическая декомпозиция ориентированных гиперграфов с распределенными связями**

В рамках иерархической декомпозиции ориентированного гиперграфа на подгиперграфы с распределенными связями различаются еще три разновидности: декомпозиция на подгиперграфы с распределенными односторонними исходящими связями, односторонними входящими связями, двусторонними связями. Могут быть также различные комбинации указанных разновидностей декомпозиции.

Иерархическая декомпозиция на подгиперграфы с распределенными односторонними входящими связями имеет место в том случае, когда матрица инциденций каждого подгиперграфа  $F_j^i$  описывает не только внутренние связи  $F_{j_1}^{(1)}$ , но и связи, задаваемые ориентированными ребрами, входящими в подгиперграф из всех других подгиперграфов  $F_j^{(i)}$ ,  $j \neq j_1$ . Описание входящих связей в каждом подгиперграфе отсутствует. Иллюстрация к данной разновидности декомпозиции показана на рис. 2.

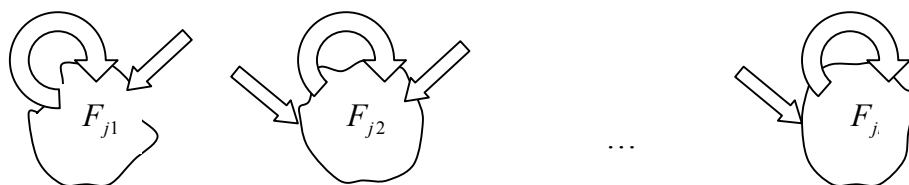


Рис. 2. Декомпозиция на подгиперграфы с распределенными входящими связями

Для иерархической декомпозиции на подгиперграфы с распределенными односторонними исходящими связями характерно обратное: для каждого подгиперграфа  $F_j^i$  задаются только внутренние ребра и ребра, выходящие из подгиперграфа  $F_{j_1}^{(i)}$  во все другие подгиперграфы  $F_{j_1}^{(i)}$ ,  $j \neq j_1$  (рис. 3).



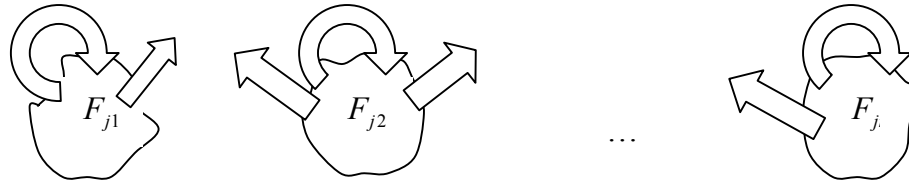


Рис. 3. Декомпозиция на подгиперграфы с распределенными исходящими связями

В случае иерархической декомпозиции на подгиперграфы с двусторонними связями подгиперграфы могут иметь оба типа ориентированных ребер (рис. 4).

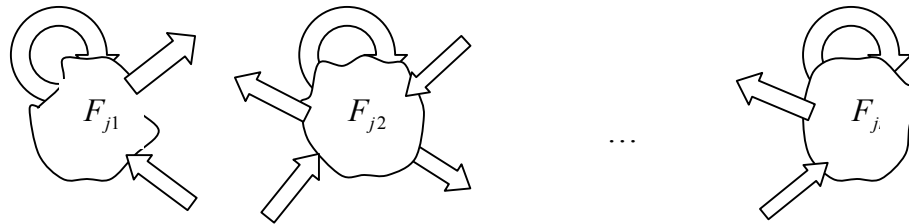


Рис. 4. Декомпозиция на подгиперграфы с распределенными двусторонними связями

В частности, рассмотрим более конкретно три названных разновидности декомпозиции применительно к ориентированным графам, как часто употребляемой модели графов причинно-следственных связей. Пусть задан граф  $G = (Q, F)$ . Разобьем его на подграфы  $G_1, G_2, \dots, G_n$  с множествами вершин  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  соответственно, причём  $\bigcup_{j=1}^n Q_j = Q$ ,  $Q_{j1} \cap Q_{j2} = \emptyset$ ,  $j_1 \neq j_2$ . Тогда матрицы смежности  $C_j, j = 1, 2, \dots, n$  подграфов, полученных в результате декомпозиции графа  $G$  на подграфы  $G_j, j = 1, 2, \dots, n$  с распределенными односторонними входящими, исходящими и двусторонними связями, согласно определению, будут иметь следующий вид

$$C_j = \begin{matrix} Q_j \\ Q_j \\ Q_j \end{matrix} \begin{matrix} C_{jj} \\ C_{ij} \\ C_{ij} \end{matrix}, \quad C'_j = \begin{matrix} Q_j & Q \setminus Q_j \\ C_{jj} & C_{ji} \end{matrix}, \quad C''_j = \begin{matrix} Q_j & Q \setminus Q_j \\ C_{jj} & C_{ji} \\ C_{ij} & 0 \end{matrix}$$

где  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, Q \setminus Q_j = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n Q_i$ .

Отметим, что в рассмотренных примерах представления гиперграфа совокупностью более простых подгиперграфов язык матриц инцидентий как форма задания гиперграфовых моделей различных систем весьма наглядно иллюстрирует достоинства представления сложных моделей сово-

купностью более простых. Однако для гиперграфов большой размерности более удобной и компактной формой его задания (в особенности в составе автоматизированных систем управления) является списковая форма. Например, ниже приведён алгоритм декомпозиции гиперграфов на подгиперграфы с сосредоточенными связями без оптимизации по тому или иному критерию (рис. 5).

1. Осуществляем разбиение  $H^{(i)}$  множества вершин  $Q_j^{(i)}$  гиперграфа  $F^i$  на  $k$  подмножеств таких, что  $Q_{j1}^{(i)} \cap Q_{j2}^{(i)} = \emptyset$ ,  $\bigcup_{j=1}^k Q_j^{(i)} = Q^{(i)}$  при выполнении ограничения  $n_j^{(i)} \leq n^{(i)}$ , где  $\sum_{j=1}^k n_j^{(i)} = n^{(i)}$ .

2. Для каждого подмножества вершин  $Q_j^{(i)}$  подгиперграфа  $F_j^{(i)}$  выбираем из списка ребер гиперграфа  $F^{(i)}$  такие ребра, которые инцидентны только элементам множества  $Q_j^{(i)}$ , и выписываем их в отдельный список.

3. Преобразуем оставшиеся элементы исходного списка в соответствии с операцией преобразования  $\varphi$  следующим образом:  $P_i = \{q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{i\lambda}\} \xrightarrow{\varphi} P_i = \{Q_{j1}^{(1)}, Q_{j2}^{(1)}, \dots, Q_{j\beta}^{(1)}\}$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, n$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, n$ .

Операция преобразования  $\varphi$  состоит в замене элементов  $q_{i\eta}$ ,  $\eta = 1, 2, \dots, \lambda$  на элементы разбиения  $H$  таким образом, что если  $q_{i\eta} \in Q_{i\lambda}^{(i)}$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, \beta$ , то  $q_{i\eta}$  заменяется на  $Q_{j\alpha}$ . При этом повторяющаяся запись  $Q_{j\alpha}^{(i)}, Q_{j\alpha}^{(i)}, \dots$  заменяется на однократную запись  $Q_{j\alpha}^{(i)}$ .

4. По сформированному подмножеству вершин  $Q_j^{(i)}$ , подпискам ребер и преобразованным элементам исходного списка ребер строим подгиперграфы  $F_j^{(i)}$  и дополнительный подгиперграф взаимосвязей  $F_{n+1}^{(i)}$ .

5. Конец работы алгоритма.

Алгоритм декомпозиции гиперграфа на подгиперграфы с сосредоточенными взаимными связями для списковой формы задания проиллюстрируем на примере гиперграфа  $F_1$ .

**Пример.** Пусть гиперграф  $F_1 = (Q, P)$  задан списком ребер:  $P_1 = \{q_1, q_4\}$ ,  $P_2 = \{q_1, q_4, q_9\}$ ,  $P_3 = \{q_2, q_3, q_5, q_6\}$ ,  $P_4 = \{q_2, q_5\}$ ,  $P_5 = \{q_3, q_6\}$ ,  $P_6 = \{q_4, q_5\}$ ,  $P_7 = \{q_4, q_7\}$ ,  $P_8 = \{q_7, q_8, q_9\}$ ,  $P_9 = \{q_7, q_8\}$ ,  $P_{10} = \{q_5, q_6\}$ .

1. Зададим на множестве вершин графа  $F_1$  разбиение  $H = H_1 = \{Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}\}$ ,  $Q_1^{(1)} = \{q_1, q_4, q_9\}$ ,  $Q_2^{(1)} = \{q_2, q_3, q_5, q_6\}$ ,  $Q_3^{(1)} = \{q_7, q_8\}$ .

2. Формируем подсписок  $Q_1^{(1)}: P_1 = \{q_1, q_4\}$ ,  $P_2 = \{q_1, q_4, q_9\}$  подсписок  $Q_2^{(1)}: P_3 = \{q_2, q_3, q_5, q_6\}$ ,  $P_4 = \{q_2, q_5\}$ ,  $P_5 = \{q_3, q_6\}$ , подсписок  $Q_3^{(1)}: P_9 = \{q_7, q_8\}$ .

3. Преобразуем оставшиеся элементы исходного списка в соответствии с операцией преобразования  $\varphi$ . В результате имеем:

$$P_6 = \{q_4, q_5\} \rightarrow P_6 = \{Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}\}, \quad P_7 = \{q_4, q_7\} \rightarrow P_7 = \{Q_1^{(1)}, Q_3^{(1)}\},$$

$$P_8 = \{q_7, q_8, q_9\} \rightarrow P_8 = \{Q_3^{(1)}, Q_3^{(1)}, Q_1^{(1)}\} = \{Q_3^{(1)}, Q_1^{(1)}\}$$

4. Строим подгиперграфы  $F_j^{(1)}$  и дополнительный подгиперграф взаимосвязей  $F_4^{(1)}$ , которые показаны на рис. 5. (б).

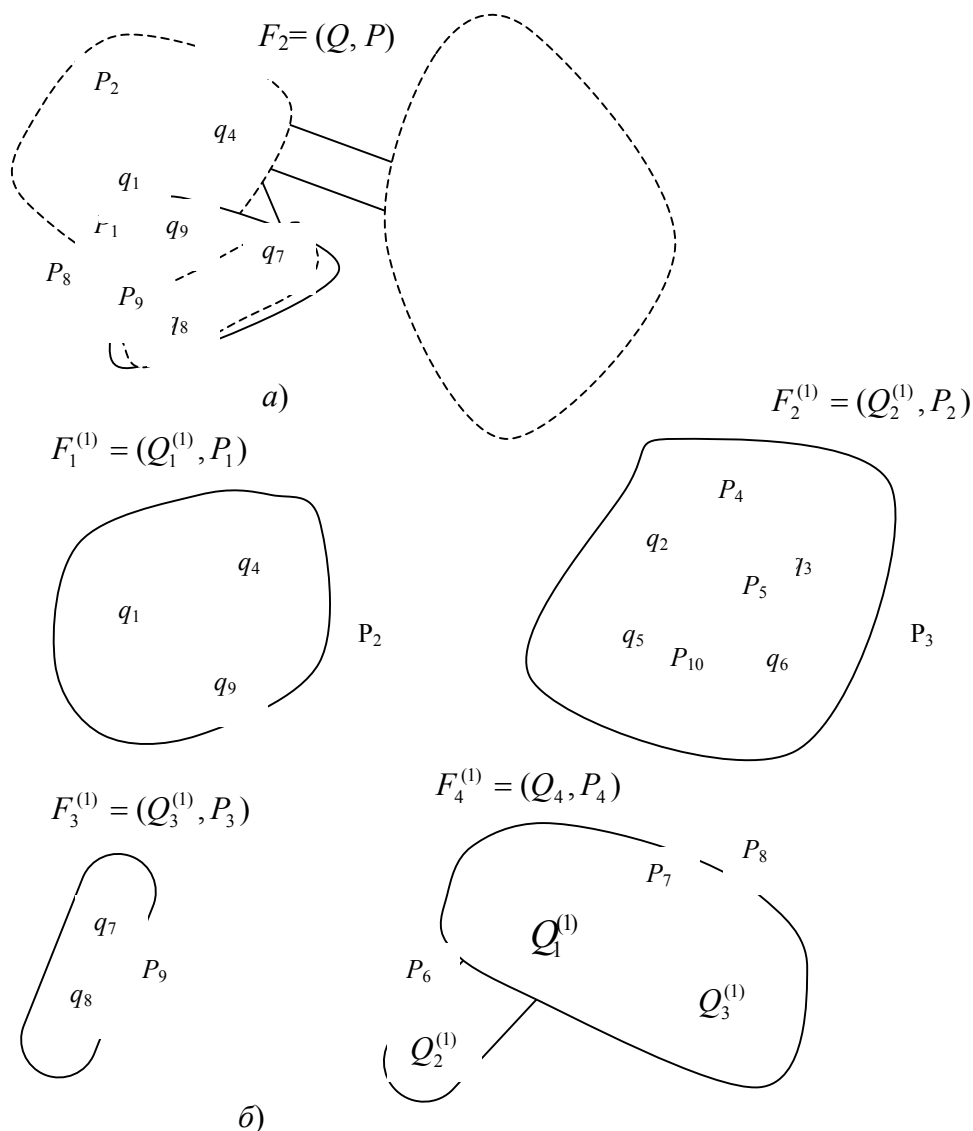


Рис. 5. Декомпозиция гиперграфа  $F_1$

Приведенный алгоритм универсален и применим к любой графовой модели (т.е. орграфовым, неографовым и гиперграфовым моделям). Особенности применения для различных графовых моделей касаются лишь форм задания списков. В случае неографа ребро может быть инцидентно лишь двум вершинам графа и, следовательно, в списке каждому ребру соответствуют только две вершины графа, т.е. все ребра  $P_i$  будут соответствовать двухэлементным множествам в списках. При применении ориентированных графовых моделей (орграфа или орггиперграфа) каждому ребру будет соответствовать не произвольный набор вершин  $\{q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{i\lambda}\}$ , а кортеж [2], (упорядоченный набор) вершин  $\langle q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{i\lambda} \rangle$ . В этом случае порядок вершин в кортеже определит ориентацию ребра.

Отличительной особенностью изложенного метода является принудительный характер декомпозиции. Это значит, что к гиперграфам не предъявляются какие-либо специальные требования, на их ребра не накладываются какие-либо ограничения. Метод применим для графовых моделей не только графов причинно-следственных связей, но и больших систем и других объектов.

Использование списковых структур позволяет компактно описывать графовые модели большой размерности, оперировать формальными представлениями графов причинно-следственных связей и систем реальной сложности в составе центров управления в кризисных ситуациях или единых дежурно-диспетчерских служб.

В статье приведено описание единого подхода к иерархической декомпозиции гиперграфовых моделей графов причинно-следственных связей. Метод иерархической позиции изложен без рассмотрения вопросов оптимизации, т.е. без поиска такой декомпозиции, которая была бы оптимальной по тому или иному критерию, например, по минимуму числа связей между подгиперграфами.

#### Литература

1. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С. Операции над гиперграфами и их свойства. - Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 4. – С. 142-149.
2. Шиханович Ю.А. Введение в современную математику. – М.: Наука, 1965. - 376 с.
3. Berge C. Graphs et hypergraphs. – Paris: Dunod, 1970, XVIII. – P. 373-473.
4. Топольский Н.Г., Святенко И.Ю., Трефилов Б.Г., Ярош В.Л. Морфологический анализ предметной области при предотвращении и ликвидации последствий ЧС. // Сборник трудов научно-технической конференции "Системы и средства обеспечения пожарной безопасности" XII международного форума "Технологии безопасности" МФТБ – 6-9 февраля 2007. - М: МВЦ "Крокус-Экспо", 2007.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 21 августа 2009 г.