

Н.П. Третьяков, О.И. Кузнецова  
(Российский государственный социальный университет;  
e-mail: kuznecova-olga@inbox.ru)

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОЛОГИИ ПРОГНОЗНЫХ ОЦЕНОК ТЕМПОВ РОСТА МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ОПЫТА СТРАН АЗИАТСКО-ТИХООКЕАНСКОГО РЕГИОНА

Рассмотрен метод прогнозирования темпов роста макроэкономических показателей, который разработан с учётом опыта прогнозирования Азиатского банка развития, в основе которого лежит автоматический метод ведущих индикаторов.

Ключевые слова: метод ведущих индикаторов, многомерные регрессионные модели, прогнозирование, макроэкономические показатели.

N.P. Tretyakov, O.I. Kuznetsova

## IMPROVEMENTS IN THE FORECAST PERFORMANCE OF MACROECONOMIC GROWTH DRAWING ON THE EXPERIENCE OF ASIAN PACIFIC COUNTRIES

Considered method of the forecasting rate of growth factors of macroeconomic. He is designed with account of the experience of the forecasting of Asian Development Bank. In base lies automatic method leading indicator.

Key words: automatic leading indicator method, multidimensional regression models, forecasting, macroeconomic growth rates.

### Введение

Авторами изложен метод прогнозирования темпов роста основных макроэкономических показателей (на примере стран СНГ) на краткосрочный и среднесрочный периоды. Этот метод разработан на основе опыта прогнозирования Азиатского банка развития с использованием *автоматического* метода *ведущих индикаторов* (АВИ).

Совершенствование метода прогнозирования заключается в следующем: разработанные ранее алгоритмы "*Автоматическая идентификация модели одновременных регрессионных уравнений*" и "*Одновременные уравнения с распределенными лагами*" включены в алгоритмы автоматического метода ведущих индикаторов.

На основе сочетания указанных выше методов разработаны оригинальные алгоритмы прогнозирования темпов роста макроэкономических показателей, составлена и отлажена реализующая их программа (в среде *Maple*).

На основе Базы данных Статкомитета СНГ [12] была проведена апробация новой программы путем вычисления прогнозных значений темпов роста основных макроэкономических показателей (валовой внутренний продукт, продукция промышленности, продукция сельского хозяйства, розничный товарооборот, инвестиции в основной капитал, экспорт и импорт товаров, индекс потребительских цен и др.) на 2009 и 2010 годы для стран СНГ (кроме Узбекистана и Туркменистана).

### **Поиск путей совершенствование методологии прогнозирования на основе опыта и разработок Азиатского банка развития**

При прогнозировании макроэкономических показателей в практике *Азиатского банка развития* (АБР) и статистических служб ряда стран региона (Китай, Индонезия, Филиппины) в качестве основного метода используются так называемые *макроэконометрические структурные модели* (МСМ). Последние представляют собой различные разновидности метода одновременных регрессионных уравнений с включением ряда дополнительных элементов, например, лаговых переменных. Таким образом, основное направление совершенствования методики прогнозирования в указанном регионе совпадает с развитием эконометрической мысли в мире. В целях дальнейшего совершенствования техники прогнозирования и преодоления недостатков и ограничений МСМ, специалисты АБР в последнее время обращают внимание на так называемый автоматический метод ведущих индикаторов – АВИ (automatic leading indicator method - ALI). По их мнению, АВИ в целом даёт лучшие результаты прогнозов, чем МСМ, однако его применение также встречает проблемы, главной из которых является та же, что в МСМ – неопределённость в выборе индикаторов.

*Метод ведущих индикаторов* (МВИ) является известным в прогнозировании (предложен Митчеллом и Бернсом в 1938 г. [1]), однако до последнего времени он применялся в основном в микроэкономике, будучи стандартным методом прогнозирования, например, бизнес-циклов. Лишь в последние годы метод стал применяться для прогнозирования инфляции, курсов валют, дефицита госбюджета и других макропоказателей [2-5]. Интерес к применению этого метода к экономике страны в целом наблюдается не только в Азиатско-тихоокеанском регионе и АБР, но и в ряде других стран, например, Хорватии [6]. Таким образом, метод ведущих индикаторов в настоящий момент является интересной новацией в прогнозировании, особенно в связи с необходимостью адаптации методов прогнозирования к условиям нестабильности и кризисов. Особый интерес представляет АВИ как разновидность и развитие МВИ, поскольку именно он позволяет сочетаться со всевозможными регрессионными подходами (одновре-

менные регрессионные уравнения, векторные авторегрессии и т.п.) с целью повышения точности прогнозов. Краткая история вопроса приведена в Приложении 1.

**Общая характеристика метода ведущих индикаторов.** Метод относится к так называемым казуальным методам прогнозирования (casual methods) в основе которых лежит попытка найти факторы, определяющие изменение прогнозируемого показателя. К числу казуальных методов относятся корреляционно-регрессионный анализ, метод ведущих индикаторов, обследования намерений потребителей и др.

Ведущие индикаторы - показатели или их временные ряды, *изменяющиеся в том же направлении, что и исследуемый показатель, но опережающие его по времени*, например, рост показателей жизненного уровня опережает показатель роста спроса. Таким образом, изучая динамику изменения показателей жизненного уровня, можно сделать выводы о возможном изменении показателя спроса на определенную продукцию.

Принципы типичного примера традиционного применения МВИ – оценки рыночного потенциала территории – приведены в Приложении 2.

В Приложении 3 приведено математическое описание метода АВИ. Как отмечается в Приложении 1 (краткая история вопроса), отличительной чертой АВИ (по сравнению с МВИ) является отказ от генерирования неких обобщённых ненаблюдаемых индикаторов, призванных характеризовать экономику в целом, как это практиковалось в обычном методе ведущих индикаторов. *Основная идея состоит в том, что вместо этого такие индикаторы, вычисляемые на первом шаге АВИ, используются затем в качестве экзогенных переменных в некоторой регрессионной модели.* Специалисты АБР используют исключительно модели векторной авторегрессии. В данном методе прогнозирования предлагается, *заимствовав первый шаг АВИ (генерация ведущих индикаторов – описание в Приложении 3 и "Алгоритм АВИ", приведённый ниже), затем использовать новые фиктивные переменные (ведущие индикаторы) в качестве экзогенных переменных в разработанных ранее алгоритмах прогноза макроэкономических показателей, основанном на одновременных регрессионных уравнениях* (с использованием распределённых лагов или без их использования).

В некоторых предыдущих работах на тему прогнозирования часто приводится построение систем взаимосвязанных тождеств и регрессионных уравнений, в которых переменные могут использоваться как результирующие в одних уравнениях и как объясняющие в других (система одновременных эконометрических уравнений). Причиной необходимости усовершенствования такой методики является то, что структура одновременных регрессионных уравнений задавалась заранее и почти не подвергалась корректировке в процессе вычислений (или, используя эконометриче-

скую терминологию, была использована "фиксированная идентификация" регрессионной модели). При этом мы исходили из содержательного смысла изучаемых переменных (макроэкономических показателей) и из ряда общепринятых постулатов экономической теории, диктующих определенную структуру взаимосвязи между ними. Структура зависимостей макроэкономических показателей между собой, принимавшаяся в первоначальном варианте методики прогнозирования, приведена в Приложении 4.

Новые фиктивные переменные (ведущие индикаторы), вычисленные методом АВИ, в настоящем методе используются в качестве экзогенных переменных в разработанных ранее алгоритмах прогноза. Возможны различные варианты такого использования: (А) полная замена использовавшихся ранее экзогенных переменных  $X$  на ведущие индикаторы; (Б) использование ведущих индикаторов наряду с исходными экзогенными переменными. Отметим, что в последнем случае не возникает проблема мультиколлинеарности, поскольку ведущие индикаторы вычисляются не как линейные комбинации переменных  $X$ , а генерируются с применением адаптивного фильтра (формулы (3.1, 3.2 Приложения 3).

### **Построение алгоритмов расчетов**

Построение всеобъемлющих регрессионных моделей, *самосогласованно* объединяющих в себе метод одновременных уравнений с другими методами, представляет собой сложную задачу, которая является одним из мировых приоритетов современных эконометрических исследований. Сейчас речь может идти лишь о комбинировании с методом одновременных регрессионных уравнений отдельных других методов, позволяющих повысить качество прогноза. Количество различных вариантов, с учетом множества возможных подходов, весьма велико. В связи с этим в настоящей статье представлено несколько различных алгоритмов прогноза, основанных на развитии прошлых разработок.

Все алгоритмы реализованы в виде единой компьютерной программы в среде *Maple*. Во всех случаях производилось первоначальное разделение исходных переменных - темпов роста макроэкономических показателей стран СНГ – на зависимые (эндогенные,  $Y_j$ ) и независимые (экзогенные,  $X_j$ ), перечисленные в Приложении 4.

Особое внимание было обращено на идентифицируемость получаемых систем уравнений, т.к. последняя вполне может нарушиться при изменении структуры. Для оценки параметров структурной модели система должна быть идентифицируемой или сверхидентифицируемой.

**Алгоритм № 1:** *"Модель одновременных регрессионных уравнений с автоматическими ведущими индикаторами в качестве экзогенных переменных"*.

Этот алгоритм состоит из следующих шагов.

А) Подготовка исходных данных согласно Приложению 3: исследование на не стационарность и сезонность и, в случае необходимости, однократное или двукратное дифференцирование, вычитание сезонной компоненты. Приведение экзогенных переменных  $X$  (перечисленных в Приложении 4) к стандартному виду (центрирование и нормирование).

Б) Проведение вычислений согласно Приложениям 3 и 7. В начале вычислений, в ходе проведения компонентного анализа, определение оптимального числа автоматических ведущих индикаторов. Получение новых переменных – автоматических ведущих индикаторов.

В) Построение системы одновременных регрессионных уравнений с эндогенными переменными  $Y$  (перечисленными в Приложении 4) и АВИ в качестве экзогенных. Проверка идентифицируемости уравнений полученной системы. В случае неидентифицируемости, вернуться к пп. А) и Б) и добавить исходные экзогенные переменные и/или увеличить число АВИ.

Г) Вычисления в соответствии с методикой прогноза макроэкономических показателей на основе одновременных регрессионных уравнений, с использованием полученной структурной матрицы.

**Алгоритм № 2:** *"Автоматическая идентификация модели одновременных регрессионных уравнений с распределенными лагами и использованием автоматических ведущих индикаторов"*.

Основная идея состоит в использовании ведущих индикаторов, наряду с исходными экзогенными переменными, в системе одновременных регрессионных уравнений с лаговыми значениями независимых переменных. *Этот алгоритм состоит из следующих шагов.*

А) Подготовка исходных данных в соответствии с п. А) Алгоритма № 1 (п.10).

Б) Вычисление автоматических ведущих индикаторов в соответствии с п. Б) Алгоритма № 1 (п.10) и добавление их к совокупности исходных экзогенных переменным (число экзогенных переменных  $N_X$  при этом увеличивается на число вычисленных АВИ).

В) Задание максимальной длины лага  $t$  и степени лагового полинома  $n$  (на практике  $n = 1, 2$  или  $3$  – см. Приложение 6).

Г) Расчет массивов значений вспомогательных переменных  $z_{ij}$  ( $i = 0, 2, \dots, n, j = 1, \dots, N_X$ ) по формулам (6.13) – (6.15) Приложения 6.

Д) Автоматическая идентификация модели (5.1) по методике, описанной в Приложении 5. При этом фигурирующая там структурная матрица

ца имеет размер  $N_Y \times (N_Y + (n + 1)N_X)$ , а вместо каждой из переменных  $X_j$  рассматриваются  $n + 1$  переменных  $z_{0j}, z_{1j}, \dots, z_{nj}, \dots$

Е) Проверка идентифицируемости уравнений полученной системы. В случае неидентифицируемости, необходимо либо изменить степень лагового полинома  $n$  и вернуться к пункту В), либо вернуться к пункту Д) и задать менее жесткие условия (см. п. В) Алгоритма №1).

Ж) Производится оценивание по двухшаговому *методу наименьших квадратов* (МНК). То есть проводятся вычисления многомерных регрессий каждого из зависимых переменных  $Y$  по всем вспомогательным переменным  $Z$ . Таким образом, получаем регрессионные уравнения:

$$\vec{Y} = \vec{B}_0 \vec{Z} + \vec{B}_1 \vec{Z} + \dots + \vec{B}_n \vec{Z} + \vec{B}_0 \quad (1)$$

Подстановка в (1) значений  $z_i$  дает  $N$  массивов зависимых переменных  $\vec{Y}_k^R, k = 1, \dots, N$ , которые представляют собой значения зависимых переменных, вычисленные с использованием полученных уравнений регрессии.

З) Далее в соответствии с двухшаговым МНК, вычисляются многомерные регрессионные модели каждой зависимой переменной  $Y$  по тем переменным (зависимым и вспомогательным), которые входят в соответствующее уравнение из системы уравнений (5.1). При этом в качестве массива измерений для зависимых переменных используются теоретические значения, вычисленные на предыдущем шаге. Таким образом, получаются:

$$\vec{Y} = \vec{a} \vec{Y} + \vec{b}_0 \vec{z}_0 + \vec{b}_1 \vec{z}_1 + \dots + \vec{b}_n \vec{z}_n + \vec{c}_0 \quad (2)$$

И) Аналогично ранее разработанному алгоритму, обозначим через  $\Phi_j$  части системы уравнений (2), содержащие независимые переменные и свободный член, например:

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^n \vec{b}_{jk} z_k + \vec{b}_{0j}, j = 1, \dots, n \quad (3)$$

К) Задавая минимальные и максимальные значения изменений независимых переменных

$$X_j^{min} \leq X_j \leq X_j^{max}, j = 1, 2, \dots, 13, \quad (4)$$

с помощью симплекс-метода определяются пределы изменения  $z_j$ :

$$\vec{z}_j^{min} \leq \vec{z}_j \leq \vec{z}_j^{max}, j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Л) Используя минимальные и максимальные значения изменений вспомогательных переменных (5), с помощью симплекс-метода и соотношений (3), определяем пределы изменения  $\Phi$ :

$$\Phi_j^{min} \leq \Phi_j \leq \Phi_j^{max}, j = 1, 2, \dots, N_Y \quad (6)$$



М) Решается система неоднородных линейных уравнений (2) относительно зависимых переменных  $Y$ , и в результате получаем:

$$\vec{Y} = \widehat{S}\vec{\Phi} \quad (7)$$

Н) Из уравнения (7), используя пределы изменения  $\Phi$  (6), с помощью симплекс-метода находятся пределы изменения зависимых переменных, которые и представляют собой их прогнозные значения:

$$Y_j^{min} \leq Y_j \leq Y_j^{max}, j = 1, 2, \dots, N_Y \quad (8)$$

Далее приводится краткое описание работы программы.

*Программа функционирует следующим образом.* После считывания исходных данных (массива наблюдаемых зависимых и независимых переменных, а также интервальных оценок независимых переменных на прогнозируемый момент времени и на предшествующие ему моменты, в соответствии с выбранной степенью лагового полинома  $n$ ) и предварительной обработки данных, производятся вычисления в соответствии с шагами А) – Н) п.14 средствами Maple. В результате получаются минимальные и максимальные значения зависимых переменных  $Y$  в соответствии с принятой нумерацией и на момент времени, для которого были заданы значения зависимых переменных  $X$ . Они и принимаются в качестве первого варианта прогноза.

Программа может также функционировать в режиме перебора возможных значений основных входных параметров – количества АВИ, величины лага и степени лагового полинома.

### **Апробация алгоритмов**

*Апробация алгоритма № 1.* Разработана оригинальная программа в пакете Maple, реализующая алгоритм "Модель одновременных регрессионных уравнений с автоматическими ведущими индикаторами в качестве экзогенных переменных". Представляет интерес сопоставить результаты некоторого ретро-прогноза по новой методике с ранее проведенной апробацией предыдущего алгоритма, с целью установления уточняющего характера вновь разработанного метода. В качестве такого сравнения выбран ретро-прогноз темпов роста ВВП на конец 2008 г., по фактическим данным до февраля 2008 г. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

Прогнозные оценки темпов роста валового внутреннего продукта стран СНГ  
на 2008 год (в постоянных ценах; в % к предыдущему году)

	Прогноз по более раннему методу (на февраль 2008)	Прогноз по алгоритму №1	Справочно: прогноз экономических органов управления страны (на февраль 2008 г.)	Фактическое значение
Азербайджан	116-118	117	116,1	110,8
Армения	110-111	110-111	111	106,8
Беларусь	108-108,5	109	108-109	110,0
Казахстан	108	106,2	105-107	103,3
Кыргызстан	107	107	106,7	103,7
Молдова	106,5	106,1	106,8	107,2
Россия	107	107,2	106,6-106,7	105,6
Таджикистан	107-107,5	107	107	107,9
Украина	106,5-107	107	107,2	102,1

Сравнение трёх прогнозов, приведённых в табл. 1, показывает, что расчётные значения по алгоритму №1 мало отличаются от результатов расчётов по ранее разработанному алгоритму, и носят, таким образом, уточняющий характер.

#### Литература

1. Mitchell W., Burns A.F. (1938). Statistical indicators of cyclical revivals. – New York: NBER, 1938.
2. Kaminsky G., Lizondo S., Reinhart C. Leading Indicators of Currency Crises, Staff Papers - International Monetary Fund, (45), 1, 1998, 1-48.
3. Banerjee A., Marcellino M., Masten I. Leading Indicators for Euro-area Inflation and GDP Growth, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, (67), 2005, 785-813.
4. Perez J. Leading indicators for euro area government deficits, International Journal of Forecasting, (23), 2007, 259–275.
5. Chauvet M., Potter S. Coincident and Leading Indicators of the Stock Market, Journal of Empirical Finance, (7), 2000, 87-111.
6. Bačić K., Vizekm. Forecasting business and growth cycles in Croatia, Ekonomski pregled, 59 (11), 2008, 646-668.
7. Stock J.H., Watson M.W. New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators. In O. Blanchard and S. Fischer, eds., NBER Macroeconomic Annual 1989. Cambridge, MA: MIT Press, 1989.
8. Camba-Mendez G., Kapetanios G., Smith R.J., Weale M.R. 2001. "An Automatic Leading Indicator of Economic Activity: Forecasting GDP Growth for European Countries." Econometrics Journal 4, S56-90.
9. Onatski A. Determining the Number of Factors from Empirical Distribution of Eigenvalues. Department of Economics Discussion Paper Series No. 0405-19, Columbia University, New York, 2005.
10. Bai J., Ng. S. Determining the Number of Primitive Shocks in Factor Models. Available: <http://www-personal.umich.edu/~ngse/research.html>, 2005.
11. <http://www.cisstat.com>.



### Краткая история возникновения и применения АВИ

Несмотря на то, что метод ведущих индикаторов и факторный анализ были развиты и начали применяться в экономике, начиная с 30-40 годов, они в течение десятилетий оставались маргинальными подходами в эконометрике. Современное возрождение интереса к ведущим индикаторам в большой степени обязано работе Стока и Ватсона [7], которые предложили извлекать, методами динамического факторного анализа, из большого числа показателей некий "латентный ведущий индикатор", или, как они его назвали, "индекс совпадающих индикаторов". Применение нового подхода было продемонстрировано на примере экономики США.

Метод АВИ - "автоматического ведущего индикатора" (automatic leading indicator - ALI), предложенный Камба-Мендесом и др. [8], по технике весьма похож на подход Стока и Ватсона. Однако применение метода было переориентировано на прогнозирование некоторых макроэкономических показателей, например, темпов роста ВВП ряда европейских стран. *Эти переменные исключались из числа тех переменных, из которых извлекались динамические факторы. Полученные факторы затем использовались как независимые (экзогенные) переменные для прогнозирования интересующих показателей методами векторной авторегрессии.* Таким образом, отличительной чертой АВИ является отказ от генерирования неких обобщённых ненаблюдаемых индикаторов, характеризующих экономику в целом, как это практиковалось в обычном методе ведущих индикаторов.

Применение метода АВИ на практике показало, что его прогностическая ценность может быть значительно выше, чем у традиционных подходов векторной авторегрессии. Тем не менее, подобно последним, он очень чувствителен к выбору переменных. Как результат, такого рода модели далеко не всегда согласованы с реальной структурой экономики.

Оригинальный подход специалистов Азиатского банка развития [9] и состоит в поиске путей сочетания АВИ с макроэкономическими структурными моделями (МСМ).

### Пример традиционного применения МВИ – оценка рыночного потенциала

При оценке рыночного потенциала территорий, зон, регионов или стран часто используют индикаторы покупательной способности. Цель при этом состоит в измерении привлекательности рынка по средневзвешенному значению трех ключевых компонентов любого потенциала рынка, т.е.:

- количества потребляющих единиц;
- покупательной способности этих потребляющих единиц;
- готовности этих потребляющих единиц к расходам.

Статистические индикаторы этих трех переменных определяются для выбранной территориальной базы (страна, область, район, город), после чего определяется средневзвешенный индекс для каждой зоны. Существует два подхода к его определению: использовать стандартный *индекс покупательной способности* (ИПС), который предлагают фирмы по изучению рынка, или построить индекс специально для анализируемого сектора или гаммы товаров. В этих целях в модель спроса включаются прогнозные оценки отдельных ее параметров.

Весовые коэффициенты в этой модели соответствуют используемым в американском журнале "Sales Marketing Management", который ежегодно публикует ИПС для различных регионов США. Эти коэффициенты определены эмпирически с использованием регрессионного анализа и в основном применимы к товарам массового спроса. Аналогичные индексы публикуются и в Европе, например изданиями "Чейз Эконометрикс" (для регионов ЕС) и "Бизнес Интернэшнл" для 117 стран во всем мире. В случае необходимости можно применять другие коэффициенты.

Специальные индексы ИПС основываются на тех же составляющих потенциала рынка, но используют индикаторы, лучше адаптированные к исследуемой области деятельности, с дополнительным привлечением индикаторов, характеризующих местные условия. Например, исследуется рынок безалкогольных напитков. Индикаторы, использованные для расчета ИПС, - это число семей с детьми, уровень дохода и число отелей, ресторанов и кафе. Индекс ИПС рассчитывается как средневзвешенное значение этих трех индикаторов (выраженных в процентах) по каждой из 14 территорий. Его предсказательная способность проверена сопоставлением индекса ИПС с объемом продаж по каждой территории. ИПС применяется для оценки проникновения торговой марки на каждую территорию. Чтобы оценить потенциал каждой территории, сначала рассчитывают "наблюдаемую" долю рынка, которую сравнивают с "ожидаемой", рассчитанной как произведение ИПС и ожидаемого объема продаж марки по всей стране. Показатель эффективности позволяет оценить масштабы проникновения марки с учетом дополнительных факторов типа остроты локальной конкуренции, срока присутствия на территории и т.д. Индекс такого типа можно также применять для распределения расходов на маркетинг между различными территориями.

### Описание автоматического метода ведущих индикаторов (АВИ)

Обозначим  $Y_t$  как переменную, которую необходимо предсказать,  $Z_t$  - совокупность  $n$  (экзогенных) переменных, которые в описываемом методе часто называют индикаторными переменными. Последние образуют массив, из которого извлекаются динамические факторы – ведущие индикаторы. С точки зрения экономики, ограничений на выбор набора индикаторных переменных, вообще говоря, нет. С точки зрения статистики, все используемые переменные должны быть стационарными. Поэтому переменные  $Z_t$  надо привести к стандартной форме (центрировать и нормировать). Следует отметить, что данные различных переменных могут обладать различной частотностью (например, месячные и квартальные).

Метод АВИ состоит из двух шагов: извлечение факторов и прогноз.

**Первый шаг** состоит в построении  $m$  новых переменных  $f_t$ , которые представляют собой факторы, получаемые методами динамического факторного анализа. Для этой цели используется следующая динамическая факторная модель:

$$Z_t = B f_t + e_t \quad (3.1)$$

$$f_t = A f_{t-1} + u_t \quad (3.2)$$

Здесь  $A$  – матрица  $m$  на  $m$ ,  $B$  – матрица  $m$  на  $n$ , элементы которых должны быть вычислены,  $e_t$  и  $u_t$  – остатки. Определение количества факторов  $m$ , вообще говоря, представляет серьёзную проблему. Возможны 3 варианта её решения: во-первых, возможно использовать два недавно разработанных статистических теста [10, 11]. Обычно рекомендуют использовать оба теста и, если они дают различные результаты, в качестве  $m$  берётся наибольшее из двух. Во-вторых, оптимальное число факторов  $m$  может быть определено по ходу проведения компонентного анализа (см. ниже). В-третьих, в ряде случаев число факторов может быть оценено экспертно.

Модель (3.1), (3.2) представляет собой фильтр Кальмана, причём, используя соответствующую терминологию, (3.1) является "уравнением сигнала", а (3.2) – "уравнением состояния". Отметим, что временной лаг в (3.2) может и превышать один такт, но чаще всего ограничиваются одним.

Результатом прогона алгоритма фильтра Кальмана (3.1), (3.2) должны быть сглаженные оценки для факторных переменных  $f_t$  и их прогнозные оценки (для последующего их использования в качестве экзогенных переменных в той или иной регрессионной модели). Однако для функционирования фильтра Кальмана, необходимо иметь начальные значения для факторов, элементов матриц и ковариационных матриц векторов остатков. Это может быть сделано с помощью компонентного анализа (**метода главных компонент** – МГК). А именно, проводится компонентный анализ  $n$  исходных переменных  $Z_t$  и строятся  $m$  новых переменных – главных компонент, начальные значения которых и используются в качестве начальных (стартовых) значений для факторных переменных. На этом этапе и может быть проведена упомянутая выше оценка числа факторов  $m$  как оптимальное количество главных компонент в МГК, поскольку в этом методе существует оценка общего количества исходной информации, сохраняющейся в данном количестве главных компонент.

Далее, для получения начальных оценок матричных коэффициентов и ковариаци-

ционных матриц остатков в (3.1), (3.2), используют многомерный регрессионный анализ. Точнее: коэффициенты регрессии  $Z$  по  $m$  главным компонентам дают начальные значения матрицы  $B$  и начальные значения соответствующей ковариационной матрицы остатков  $e_t$ . Регрессия  $m$  главных компонент по своим лагам даёт начальные значения матрицы  $A$ . За неимением ничего лучшего, в качестве начальной ковариационной матрицы для остатков  $u_t$ , берут единичную матрицу.

Таким образом, используя начальные условия, с помощью модели (3.1), (3.2) получают  $m$  новых переменных (временных рядов), которые и представляют собой ведущие индикаторы.

**Второй шаг** метода АВИ состоит в использовании полученных ведущих индикаторов в той или иной регрессионной модели для прогнозируемого показателя  $Y_t$ . В оригинальных работах разработчиков метода это были модели векторной авторегрессии (VAR), которые в общем виде можно описать уравнениями:

$$\begin{pmatrix} y \\ f \end{pmatrix}_t = \Pi_1 \begin{pmatrix} y \\ f \end{pmatrix}_{t-1} + \dots + \Pi_p \begin{pmatrix} y \\ f \end{pmatrix}_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (3.3)$$

где  $p$  есть временной лаг, выбираемый так, чтобы остатки  $\varepsilon_t$  удовлетворяли обычно налагаемым на них требованиям.

Однако использование ведущих индикаторов как новых экзогенных переменных, не обязательно ограничивается векторными авторегрессиями (3.3), а может распространяться, например, на модели одновременных регрессионных уравнений или модели таких уравнений с включением лаговых переменных.

Первый шаг метода налагает специфические требования на используемые массивы данных. Прежде всего, экзогенные переменные  $Z$  должны быть стационарными, следовательно, строго говоря, необходимо использовать тест на стационарность и, в случае необходимости, подвергать нестационарную переменную однократному или двукратному дифференцированию (т.е. использовать вместо исходного временного ряда ряд первых или вторых разностей). Далее, разработчики метода рекомендуют выделять и вычитать из рядов выраженную сезонность и случайные выбросы – каким-либо стандартным способом. Следует отметить при этом, что случайные выбросы надо удалять с осторожностью, поскольку, например, в условиях кризиса, именно они могут выражать основную тенденцию. Наконец, переменные  $Z$  необходимо привести к стандартному виду, т.е. центрировать и нормировать. Прогнозируемую переменную  $Y$  приводить к стандартному виду не следует.

### Стандартная структура зависимостей макроэкономических показателей

Принималась следующая структура зависимостей макроэкономических показателей между собой (в скобках приведены обозначения независимых переменных  $X$  и зависимых переменных  $Y$ , которые использовались как в предыдущих вариантах метода, так и в настоящей статье):

#### **факторы, влияющие на темпы роста ВВП ( $Y_1$ ):**

- темпы роста промышленного производства ( $Y_2$ ),
- темпы роста продукции сельского хозяйства ( $Y_3$ ),
- темпы роста розничного товарооборота ( $Y_4$ ),
- темпы роста платных услуг населению ( $X_1$ ),
- темпы роста инвестиций в основной капитал ( $Y_5$ ),
- темпы роста грузооборота предприятий транспорта ( $X_2$ ),
- темпы роста экспорта ( $Y_6$ ),
- темпы роста импорта ( $Y_7$ ),
- темпы роста численности занятых ( $X_3$ ),
- индекс потребительских цен ( $X_4$ ),
- темпы роста денежного агрегата М2 ( $X_5$ ),
- темпы роста курса национальной валюты ( $X_6$ );

#### **факторы, влияющие на темпы роста промышленного производства ( $Y_2$ ):**

- темпы роста добычи нефти (для нефтедобывающих стран) ( $X_7$ ),
- темпы роста добычи газа (для газодобывающих стран) ( $X_8$ ),
- темпы роста добычи угля (для угледобывающих стран) ( $X_9$ ),
- темпы роста инвестиций в основной капитал ( $Y_5$ ),
- темпы роста импорта ( $Y_6$ ),
- темпы роста экспорта ( $Y_7$ ),
- индекс цен производителей промышленной продукции ( $X_{10}$ ),
- темпы роста курса национальной валюты ( $X_6$ );

#### **факторы, влияющие на темпы роста продукции сельского хозяйства ( $Y_3$ ):**

- темпы роста производства зерна ( $X_{12}$ ),
- темпы роста поголовья крупного рогатого скота ( $X_{13}$ ),
- индексы цен на сельскохозяйственную продукцию (в связи с их отсутствием в большинстве стран были использованы ИПЦ ( $X_4$ );

#### **факторы, влияющие на темпы роста розничного товарооборота ( $Y_4$ ):**

- темпы роста реальных располагаемых денежных доходов населения ( $X_{11}$ ),
- индекс потребительских цен ( $X_4$ ),
- темпы роста промышленного производства ( $Y_2$ ),
- темпы роста продукции сельского хозяйства ( $Y_3$ ),
- темпы роста импорта ( $Y_7$ ),
- темпы роста курса национальной валюты ( $X_6$ ),
- индекс цен производителей промышленной продукции ( $X_{10}$ ),

**факторы, влияющие на темпы роста инвестиций в основной капитал ( $Y_5$ ):**

- темпы роста промышленного производства ( $Y_2$ ),
- индекс цен производителей промышленной продукции ( $X_{10}$ ),
- темпы роста экспорта ( $Y_6$ ),
- темпы роста курса национальной валюты ( $X_6$ );

**факторы, влияющие на темпы роста экспорта ( $Y_6$ ):**

- темпы роста промышленного производства ( $Y_2$ ),
- темпы роста добычи нефти (для нефтедобывающих стран) ( $X_7$ ),
- темпы роста добычи газа (для газодобывающих стран) ( $X_8$ ),
- темпы роста добычи угля (для угледобывающих стран) ( $X_9$ ),
- темпы роста продукции сельского хозяйства ( $Y_3$ ),
- темпы роста курса национальной валюты ( $X_6$ );

**факторы, влияющие на темпы роста импорта ( $Y_7$ ):**

- темпы роста курса национальной валюты ( $X_6$ ),
- реальные располагаемые денежные доходы населения ( $X_{11}$ ),
- индекс потребительских цен ( $X_4$ ),
- темпы роста розничного товарооборота ( $Y_4$ ),
- темпы роста промышленного производства ( $Y_2$ ),
- темпы роста продукции сельского хозяйства ( $Y_3$ ).

Взаимозависимость этих переменных описывалась *специальной матрицей* (в данном случае размера 7 на 20), состоящей из нулей и единиц. Строки и первые 7 столбцов в этой матрице соответствуют зависимым переменным  $Y$ , а столбцы с 8-го по 20-й – независимым переменным  $X$ . Матрица, в которой закодирована вышеприведенная зависимость, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$



### Автоматическая идентификация модели одновременных регрессионных уравнений

Основная идея состоит в выявлении в уравнениях наиболее значимых регрессионных коэффициентов и в исключении из них переменных, по которым эти коэффициенты менее значимы. Алгоритм относится к той же категории, что и широко известный алгоритм пошагового исключения регрессоров. От последнего данный алгоритм выгодно отличается возможностью формализации и автоматизации расчетов.

Для определения наиболее значимых коэффициентов в системе уравнений, связывающих переменные  $Y$  и  $X$ :

$$\vec{Y} = \vec{A}_0 + A\vec{Y} + B\vec{X}, \quad (5.1)$$

в качестве первого шага алгоритма производится вычисление всех регрессионных коэффициентов. То есть по имеющимся данным базового периода строятся уравнения регрессии каждой из зависимых переменных  $Y_j$  по всем зависимым и независимым переменным  $Y_k, X_i$  (за исключением самой  $Y_j$ ).

Далее из полученных коэффициентов  $a_{jk}, b_{ji}$  вычисляются параметры:

$$\beta_{jk} = a_{jk} \frac{\sigma_k}{\sigma_j}, \quad \beta_{ji} = b_{ji} \frac{\sigma_i}{\sigma_j}, \quad (5.2)$$

где  $\sigma_j$  - *средние квадратичные отклонения* (СКО) соответствующих переменных.

На следующем шаге для каждого уравнения вычисляются средние значения абсолютных значений параметров  $\beta_{jk}$ :

$$\beta_j^{(0)} = \frac{1}{(N_x + N_y - 1)} \sum_{k=1}^{N_x + N_y - 1} |\beta_{jk}|, \quad (5.3)$$

где  $N_y, N_x$  - число зависимых и независимых переменных (в прежней практике – 7 и 13, в настоящее время к 13 экзогенным переменным могут добавляться ведущие индикаторы).

Далее производится отбор значимых коэффициентов в регрессионных уравнениях (5.1) путем сравнения  $|\beta_{jk}|$  со средними  $\beta_j^{(0)}$ , чтобы оставить только те коэффициенты, для которых  $|\beta_{jk}| \geq \beta_j^{(0)}$ , а остальные коэффициенты в уравнениях (5.1) становятся нулевыми.

В результате получаем искомую структуру регрессионных уравнений. Матрица, в которой закодирована эта структура, будет иметь вид, отличный от использовавшегося ранее "стандартного" вида. Например, вычисления, произведенные на основе помещенных данных по Азербайджану за период 2001 – середина 2007 гг., привели к следующей структуре взаимозависимости макроэкономических параметров, которая существенно отличается от (4.1):

```
[ 0101000000 101010010 ]  
[ 0000100000 000100000 ]  
[ 0100100000 001100000 ]  
[ 0100000100 101100000 ]  
[ 0110000000 001100010 ]  
[ 0101000000 100100000 ]  
[ 0101000000 000111100 ]
```

Далее при практической реализации этого подхода вычисления производились в соответствии с ранее разработанной методикой прогноза темпов роста макроэкономических показателей на основе одновременных регрессионных уравнений (2007 г.).

### Математические основы включения в регрессионные уравнения лаговых переменных

При исследовании социально-экономических процессов почти всегда требуется моделировать ситуации, когда значение показателя в данный момент времени формируется под воздействием факторов, имевших место в прошедшие моменты  $t-1, t-2, \dots, t-m$ . Величина  $m$  называется "лагом", который характеризует степень запаздывания влияния фактора на результат. Переменные, влияние которых не является мгновенным, а характеризуется определенным запаздыванием, называются *лаговыми*.

По эконометрической терминологии, модели, в той или иной форме использующие лаговые переменные, называются *динамическими*. Очевидно, что алгоритмы среднесрочного прогнозирования макроэкономических показателей обязательно должны содержать в себе элементы динамических моделей, ввиду несомненного воздействия экономических факторов на их значения в будущие моменты времени.

Динамические модели подразделяются на две основные категории. К ним относятся модели авторегрессии и модели с распределенным лагом, в которых значения переменной за прошлые периоды времени (лаговые переменные) непосредственно включены в модель.

**А. Модели с распределенным лагом** содержат в качестве лаговых независимые переменные. Это модели вида

$$y_t = a + b_0x_t + b_1x_{t-1} + b_2x_{t-2} + \dots + b_mx_{t-m} + \Delta_t. \quad (6.1)$$

**В. Модели авторегрессии** в качестве лаговых содержат значения зависимых переменных:

$$y_t = a + b_0x_t + c_1y_{t-1} + c_2y_{t-2} + \dots + c_my_{t-m} + \Delta_t. \quad (6.2)$$

Использование динамических моделей сталкивается с принципиальными трудностями, главными из которых являются:

1) в моделях авторегрессии, а также бывает, что и в моделях с распределенным лагом, нарушаются базовые предпосылки применения метода наименьших квадратов (МНК). Поэтому оценка параметров не может производиться стандартными методами; применение МНК к моделям авторегрессии ведет к получению смещенных, несостоятельных и неэффективных оценок;

2) необходимость выбора оптимальной длины лага и его структуры (т.е. надо выбрать, какие независимые переменные использовать в качестве лаговых);

3) между двумя видами динамических моделей (6.1) и (6.2) существует взаимосвязь, поэтому требуется осуществлять переход от одной к другой.

Ранее предлагалось совершенствование методов прогнозирования на основе системы одновременных регрессионных уравнений путем включения в нее лаговых переменных с использованием динамических моделей обеих категорий – с распределенным лагом и авторегрессии. Далее приводится краткое изложение основных подходов, которые были использованы.

*Идентификация моделей с распределенным лагом.* Структуру модели с конечным числом лагов достаточно просто оценить путем ее сведения к уравнению множественной регрессии (так называемый метод Алмон). Структурой лага называется зависимость коэффициента регрессии от величины лага. Лаги, структура которых может

быть описана с помощью полиномов, называются лагами Алмон.

В общем виде для полинома  $n$ -й степени уравнение (6.1) имеет вид:

$$y_t = a + \sum_{i=0}^m (\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 + \dots + \alpha_n i^n) x_{t-i} + \Delta_t. \quad (6.3)$$

В частности, при  $n = 2$  уравнение принимает вид:

$$y_t = a + \sum_{i=0}^m (\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2) x_{t-i} + \Delta_t. \quad (6.4)$$

Иными словами, в данном методе учитывается, что сила воздействия текущих и лаговых значений факторного признака различна. Преобразуя уравнение (6.4) и вводя новые переменные:

$$z_0 = \sum_{i=0}^m x_{t-i}, \quad (6.5)$$

$$z_1 = \sum_{i=0}^m i x_{t-i}, \quad (6.6)$$

$$z_2 = \sum_{i=0}^m i^2 x_{t-i}, \quad (6.7)$$

уравнение (6.4) приводится к виду:

$$y_t = a + \alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \Delta_t. \quad (6.8)$$

Таким образом, уравнение регрессии с распределенным лагом свелось к квадратичному (в общем случае -  $n$ -й степени) уравнению регрессии обычного вида, коэффициенты которого могут оцениваться стандартным способом (МНК, при условии правильного выбора величины лага - см. ниже).

*Алгоритм применения метода Алмон для целей параметризации моделей с распределенным лагом следующий:*

- А) определить максимальную величину лага  $m$ ;
- Б) определить степень полинома  $n$ , описывающего структуру лага;
- В) рассчитать значения переменных  $z_i$  по формулам (6.5)-(6.7) (или аналогичным формулам в случае больших степеней  $n$ ) на основе массивов исходных переменных;
- Г) вычислить коэффициенты уравнения регрессии (6.8) стандартными способами;
- Д) рассчитать параметры исходной модели (6.1) или (6.2).

При применении описанного алгоритма необходимо учитывать и решать следующие *проблемы*.

1) В методе Алмон величина лага  $m$  должна быть задана заранее; это создает проблему ее выбора и увеличивает число априорно заданных параметров, что всегда нежелательно в алгоритмах прогнозирования. Следует отметить, что выбор меньшего лага, чем реальное значение, ведет к тому, что в уравнении регрессии не будет учитываться фактор, оказывающий существенное влияние на результат. Поскольку в таком случае влияние этого фактора неизбежно будет выражаться в остатках, то не будет выполняться предпосылка МНК о случайности остатков, а, следовательно, полученные оценки будут смещенными и неэффективными. В другом случае (если величина лага будет больше реального значения) оценки будут несмещенными, однако, их эффективность снизится ввиду включения в модель статистически незначимого фактора. Оптимальную величину лага можно определить на основе априорной информации согласно

экономической теории или на основе эмпирических исследований. Также простым способом определения величины лага является измерение тесноты связи между результатом и лаговыми значениями факторов. Таким образом, из вышеизложенного следует, что лучше исходить из максимально возможного лага, т.к. его занижение приведет к более серьезным проблемам, чем завышение.

2) Выбор степени лагового полинома  $n$ . В принципе, на практике рекомендуется использовать степень полинома  $n$  на единицу большую, чем число экстремумов в структуре лага, однако в случае отсутствия априорной информации о такой структуре, величину  $n$  определяют по наилучшей модели путем сравнения уравнений, построенных для разных значений  $n$ . Иными словами, степень лагового полинома в значительной степени остается эмпирическим, априорно заданным параметром.

3) Переменные  $z_i$  согласно формулам (6.5)-(6.7), определяемые как линейные комбинации исходных факторов  $x_i$ , коррелируют между собой в случае высокой связи переменных  $x_i$ , поэтому оценку параметров преобразованной модели придется проводить в условиях мультиколлинеарности факторов.

Преимущество метода Алмон заключается в том, что он применим для моделирования процессов, характеризующихся разнообразными структурами лагов и при относительно небольшом количестве переменных в преобразованной модели, причем длина лага в принципе неограниченна (при условии, что она задана заранее). По этой причине, при отборе подходов, включаемых в метод прогнозирования на основе одно-временных регрессионных уравнений, в части моделей с распределенным лагом было принято решение о применении метода Алмон.

*Оценка параметров моделей авторегрессии.* При построении авторегрессионных моделей вида (6.2) возникают три проблемы.

1) Наличие лаговых значений зависимого признака приводит к нарушению предпосылки МНК о делении переменных на результативную (зависимую) и факторную (независимую).

2) Вполне вероятно наличие автокорреляции между случайными отклонениями  $\Delta_t$ .

3) Из-за зависимости между текущими значениями  $y_t$  и текущими остатками  $\Delta_t$  существует взаимозависимость между  $y_{t-1}$  и  $\Delta_{t-1}$ . Следовательно, нарушается также предпосылка об отсутствии связи между результативным признаком и остатками.

Наличие этих проблем ведет, как уже отмечалось, к получению смещенных и несостоятельных оценок в случае прямого применения МНК в моделях вида (6.2). Поэтому, так же, как и в случае моделей с распределенным лагом, необходимы специальные приемы оценивания параметров авторегрессионных уравнений.

Наиболее распространенным методом является *метод инструментальных переменных*. Основная идея метода состоит в том, чтобы заменить переменную в правой части модели (6.2), для которой нарушаются предпосылки МНК, на новую, включение которой не приводит к нарушению его предпосылок (так называемую инструментальную, или искусственную, переменную).

Подбор инструментальной переменной зависит от практической ситуации. В частности, возможна оценка такой переменной как результат регрессии переменной  $y$  на независимые переменные  $x$ , входящие в первоначальную модель (6.2). Поскольку  $y_t$  зависит не только от  $y_{t-1}$ , но и от  $x_t$ , то вполне может иметь место зависимость

$y_{t-1}$  от  $x_{t-1}$ :

$y_{t-1} = \gamma_0 + \gamma_1 x_{t-1} + y_t$ , обозначив  $y_{t-1}^{uncm} = y_{t-1} - y_t$ , получаем:

$$y_{t-1}^{uncm} = \gamma_0 + \gamma_1 x_{t-1}. \quad (6.9)$$

Оценка этого уравнения может производиться классическим МНК. Оценка  $y_{t-1}^{uncm}$  может служить в качестве инструментальной переменной для фактора  $y_t$ . Такая переменная представляет собой линейную зависимость переменной  $x_{t-1}$ . При использовании этого метода не нарушается предпосылка об отсутствии зависимости между независимыми переменными и остатками.

Таким образом, модель регрессии (6.2) приобретает вид

$$y_t = a + b_0 x_t + c_1 y_{t-1}^{uncm} + \Delta_t. \quad (6.10)$$

Следует, однако, помнить, что реализация этого подхода приводит к проблеме мультиколлинеарности. В международной практике иногда эту проблему рекомендуется решать путем включения в модель фактора времени в качестве независимой переменной.

Модели векторной авторегрессии и простые модели авторегрессии соотносятся так же, как системы регрессионных уравнений соотносятся с отдельными регрессионными уравнениями. Показатели для прогноза на заданное количество временных тактов вычисляются путем многократного повторения выбранной формы авторегрессии или векторной авторегрессии, со сдвигом вперед.

Алгоритм включения лаговых переменных осуществляется следующим образом. В матричной форме система имеет вид:

$$\vec{Y} = \hat{A}\vec{Y} + \hat{B}\vec{X}_t + \hat{C}_1\vec{X}_{t-1} + \hat{C}_1\vec{X}_{t-2} + \dots + \hat{C}_1\vec{X}_{t-m} + \vec{A}_0, \quad (6.11)$$

где  $\hat{A}$  - матрица размера  $N_Y \times N_Y$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}_j$  - матрицы размера  $N_Y \times N_X$ ,  $\vec{A}_0$  - вектор длины  $N_Y$  ( $N_Y, N_X$  - соответственно число зависимых и независимых переменных).

Корректное включение лаговых переменных обеспечивается использованием вспомогательных переменных (6.5)-(6.7). Выражение системы (6.11) через вспомогательные переменные имеет вид:

$$\vec{Y} = \hat{A}\vec{Y} + \hat{Q}_0\vec{z}_0 + \hat{Q}_1\vec{z}_1 + \dots + \hat{Q}_n\vec{z}_n + \vec{A}_0, \quad (6.12)$$

где  $\hat{Q}_j$  - матрицы размера  $N_Y \times N_X$ .

Векторы  $\vec{z}_j$  представляют собой массивы вспомогательных переменных, вычисленных по формулам (6.5) - (6.7):

$$z_{0j} = \sum_{i=0}^m (x_j)_{t-i}; \quad (6.13)$$

$$z_{1j} = \sum_{i=0}^m i (x_j)_{t-i}; \quad (6.14)$$

$$z_{2j} = \sum_{i=0}^m i^2 (x_j)_{t-i}, j = 1, \dots, N_X \quad (6.15)$$

и т.д., если степень лагового полинома  $n$  превышает 2.

Максимальная длина лага  $m$  и степень лагового полинома  $n$  фактически являются входными, априорно задаваемыми параметрами алгоритма.



Адаптивный фильтр Кальмана

Ниже приведены основные сведения об алгоритме фильтра Кальмана, в том числе расчётные формулы. Формулы (7.2), (7.3) соответствуют формулам (3.1), (3.2) со следующим соответствием обозначений:

$$x(k) \rightarrow f_i; y(k) \rightarrow Z_i; H \rightarrow B; \Phi \rightarrow A; m \rightarrow v; e \rightarrow a \quad (7.1)$$

Цель алгоритма – синтез (расчёт) новых временных рядов  $Z_i$  с минимальной дисперсией на основе имеющихся рядов  $f_i$  ("вектор наблюдений").

Алгоритм фильтра Кальмана относится к категории так называемых адаптивных фильтров. Они часто применяются на практике в различных системах обработки информации. Их задача - позволить системе подстраиваться под статистические параметры входного сигнала, не требуя при этом задания каких-либо моделей.

Появившись в конце 1950-х годов, адаптивные фильтры прошли большой путь, превратившись из экзотической технологии, применявшейся преимущественно в военных целях, в "ширпотреб", без которого сейчас была бы немыслима работа модемов, сотовых телефонов и многого другого. Существует большое количество адаптивных алгоритмов, различающихся вычислительной сложностью, особенностями поведения, используемыми исходными данными и структурами самих адаптирующихся систем.

Общая структура адаптивного фильтра показана на рисунке 7.1. Входной дискретный сигнал  $x(k)$  обрабатывается дискретным фильтром, в результате чего получается выходной сигнал  $y(k)$ . Этот выходной сигнал сравнивается с образцовым сигналом  $d(k)$ , разность между ними образует сигнал ошибки  $e(k)$ . Задача адаптивного фильтра – минимизировать ошибку воспроизведения образцового сигнала. С этой целью блок адаптации после обработки каждого отсчета анализирует сигнал ошибки и дополнительные данные, поступающие из фильтра, используя результаты этого анализа для подстройки параметров (коэффициентов) фильтра.

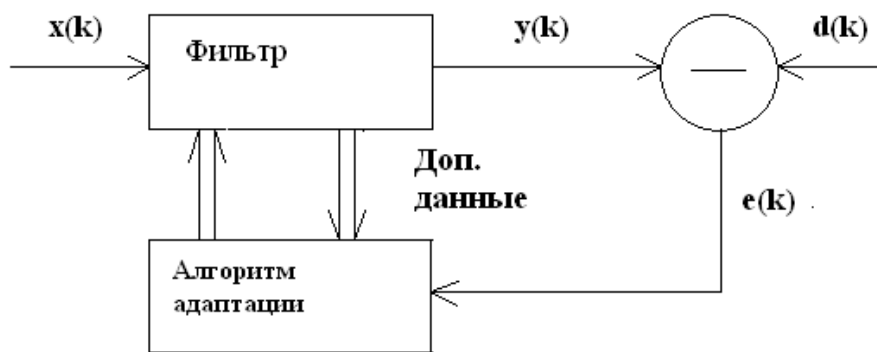


Рис. 7.1. Общая структура адаптивного фильтра

Цель фильтра Кальмана – минимизировать дисперсию оценки векторного дискретного случайного процесса  $x(k)$ , изменяющегося во времени следующим образом:

$$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + v(k), \quad (7.2)$$

где  $\Phi(k)$  – матрица перехода,  $v(k)$  – случайный вектор (шум процесса), имеющий нормальное распределение с корреляционной матрицей  $Q_p(k)$ .

Для наблюдения доступен линейно преобразованный процесс  $y(k)$ , к которому добавляется шум наблюдения

$$y(k) = H(k)x(k) + m(k), \quad (7.3)$$

где  $H(k)$  – матрица наблюдения,  $m(k)$  – шум наблюдения, представляющий собой случайный вектор, имеющий нормальное распределение с корреляционной матрицей  $Q_m(k)$ .

Поиск алгоритма для рекурсивного обновления оценки процесса  $\hat{x}(k)$  дает следующую последовательность формул:

$\hat{x}(k) = C(k)\Phi(k)\hat{x}(k-1)$  – прогнозируемое значение наблюдаемого сигнала;

$e(k) = y(k) - \hat{x}(k)$  – невязка между прогнозируемым и реально наблюдаемым значениями;

$K(k) = P(k-1)C^T(k)(C(k)P(k-1)C^T(k) + Q_m(k))^{-1}$  – кальмановский коэффициент усиления;

$\hat{x}(k) = \Phi(k)\hat{x}(k-1) + K(k)e(k)$  – обновление оценки процесса  $x(k)$ ;

$P(k) = \Phi(k)[P(k-1) - K(k)C(k)P(k-1)]\Phi^T(k) + Q_m(k)$  – обновление оценки корреляционной матрицы ошибок фильтрации.

При использовании фильтра Кальмана для решения задачи адаптивной фильтрации отслеживаемым процессом является *вектор коэффициентов оптимального фильтра*  $w$ .

Предположим, что детерминированных изменений коэффициентов не происходит, поэтому матрица перехода  $\Phi$  является единичной:  $\Phi(k) = E$ . В качестве матрицы наблюдения выступает вектор содержимого линии задержки фильтра  $u(k)$ . Таким образом, выходной сигнал фильтра представляет собой прогнозируемое значение наблюдаемого сигнала, а в качестве самого наблюдаемого сигнала выступает образцовый сигнал адаптивного фильтра  $d(k)$ . Шум наблюдения в данном случае является ошибкой воспроизведения образцового сигнала, а матрица  $Q_m$  превращается в скалярный параметр – средний квадрат сигнала ошибки. Величина этого параметра слабо влияет на поведение алгоритма. Рекомендуемые значения –  $(0.001 \dots 0.01) \sigma_d^2$ .

Если фильтруется стационарный случайный процесс, коэффициенты оптимального фильтра являются постоянными и можно принять  $Q_m = 0$ . Чтобы дать фильтру возможность отслеживать медленные изменения статистики входного сигнала, в качестве  $Q_m$  может использоваться диагональная матрица.

В результате приведенные выше формулы принимают следующий вид

$y(k) = u^T(k)\hat{w}(k-1)$  – выходной сигнал фильтра (прогнозируемое значение образцового сигнала);

$e(k) = d(k) - y(k)$  – ошибка фильтрации;

$K(k) = \frac{P(k-1)u(k)}{u^T(k)P(k-1)u(k) + Q_m}$  – кальмановский коэффициент усиления;

$\hat{w}(k) = \hat{w}(k-1) + K(k)e(k)$  – обновление оценки коэффициентов фильтра  $w(k)$ ;

$P(k) = P(k-1) - K(k)u^T(k)P(k-1) + Q_p$  – обновление оценки корреляционной матрицы ошибок оценивания.

Начальное значение вектора  $w$  обычно принимается нулевым, а в качестве исходной оценки матрицы  $P$  используется диагональная матрица вида  $CE$ , где  $E$  – единичная матрица.

## Глоссарий основных используемых терминов

**Фильтр** – алгоритм преобразования одних временных рядов ("сигналов") в другие с целью их сглаживания, минимизации дисперсии или с другими целями.

**Адаптивные фильтры** – алгоритмы, способные подстраиваться под статистические параметры входного сигнала, не требуя при этом задания каких-либо моделей.

**Регрессионный анализ, Многомерная регрессия** – исследование и построение функциональных зависимостей средних значений одного признака  $Y$  (результатирующая, объясняемая, зависимая переменная) от значений нескольких других признаков (объясняющие, независимые переменные)  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .

**Уравнение регрессии, Регрессионная модель** – математический вид зависимости, полученный в регрессионном анализе:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_M)$$

В зависимости от того, является ли уравнение линейным по всем переменным или нет, различают **модели линейной и нелинейной регрессии**.

**Линейная регрессионная модель** – линейный вид уравнения регрессии:

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_M X_M$$

Коэффициенты  $a_j$  называются **коэффициентами регрессии**.

**Регрессия по времени** – случай регрессионной модели, когда имеется только одна переменная, представляющая собой время:  $X_1 = t$ .

**Системы одновременных регрессионных уравнений** – обобщение модели регрессии на случай, когда результирующие переменные  $Y$  могут выступать также в качестве объясняющих в некоторых уравнениях:

$$\begin{cases} Y_1 = f_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_P, X_1, X_2, \dots, X_M) \\ Y_2 = f_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_P, X_1, X_2, \dots, X_M) \\ \dots\dots\dots \\ Y_P = f_P(Y_1, Y_2, \dots, Y_P, X_1, X_2, \dots, X_M) \end{cases}$$

Такая структура позволяет намного лучше учесть сложную реальную взаимозависимость переменных, чем простая регрессионная модель. В настоящее время разработаны подходы к анализу таких систем лишь в случае линейных уравнений

**Независимая (объясняющая, факторная, экзогенная) переменная** – переменная, входящая в правую часть уравнения регрессии.

**Зависимая (объясняемая, результирующая, эндогенная) переменная** – переменная, входящая в левую часть уравнения регрессии.

**Идентификация регрессионной модели** – задача определения конкретной структуры регрессионных уравнений, наиболее близко описывающей реальное положение дел.

**Авторегрессия** – модель **регрессии**, связывающая текущее значение временного ряда с некоторым конечным числом прошлых значений. В случае, когда удастся выявить некоторую **систематическую** зависимость от прошлой истории, это позволяет делать прогноз на будущее.

**Лаг (временной)** – количество прошлых значений временного ряда, учитываемых в **авторегрессии, скользящих средних** или любых других методах анализа временных рядов.

**Лаговая переменная** – независимая переменная, значения которой входят в регрессионные уравнения в лаговой форме (т.е. уравнения содержат ее значения, относящиеся к прошлым моментам времени); иными словами, влияние этих переменных не является мгновенным, а характеризуется определенным запаздыванием

**Модели с распределенным лагом** содержат в качестве лаговых независимые переменные:

$$y_t = a + b_0x_t + b_1x_{t-1} + b_2x_{t-2} + \dots + b_mx_{t-m} + \Delta_t$$

**Модели авторегрессии** в качестве лаговых содержат значения зависимых переменных:

$$y_t = a + b_0x_t + c_1y_{t-1} + c_2y_{t-2} + \dots + c_my_{t-m} + \Delta_t$$

**Базовый период регрессии (база регрессии)** – участок временного ряда (совокупность известных значений параметров), используемый для построения регрессионной модели.

**Корреляционная связь между двумя переменными** – состояние, когда изменение (увеличение или уменьшение) значений одной переменной с большой долей вероятности свидетельствуют об изменении другой переменной..

**Аналитическая аппроксимация** – описание какой-либо реальной (эмпирической) зависимости специально подобранной (вычисленной) математической функцией.

**Интерполяция** – оценка неизвестных значений временного ряда в промежутке между известными значениями. Одним из способов интерполяции является применение уравнения регрессии, построенного на основе известных данных.

**Экстраполяция** – оценка неизвестных значений временного ряда вне промежутка между известными значениями (т.е. в прошедшие или будущие моменты времени). В случае оценки в будущие моменты времени синоним экстраполяции – прогнозирование. Экстраполяция всегда представляет собой неизмеримо более сложную проблему, чем **интерполяция**.

**Анализ значимости** – процедура, позволяющая ответить на вопрос, можно ли считать отличными от нуля вычисленные характеристики (например, коэффициенты регрессионного уравнения). В качестве входного параметра требует задания **уровня значимости**, который имеет смысл вероятности того, что сделанный вывод будет ошибочным. Обычно принимают уровни значимости  $\alpha = 0,05$  или  $\alpha = 0,01$ .

**Коэффициент детерминации  $R^2$**  – показатель качества регрессионной модели, показывающий долю общей вариации результирующего признака  $Y$  в уравнении регрессии, объясняемую изменением признаков  $X_1, X_2, \dots, X_N$  (или, нестрого говоря, долю информации о признаке  $Y$ , которая учитывается используемым уравнением регрессии). Коэффициент детерминации численно равен квадрату **множественного коэффициента корреляции** (для переменной  $Y$ ).

**Остатки регрессии** – погрешности описания результирующей переменной с помощью регрессионного уравнения, т.е. разности (в момент времени  $t$ ) между истинными значениями  $y$  и рассчитанными по регрессионному уравнению  $\hat{y}_t$ :

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$$

**Мультиколлинеарность** – значимая корреляционная зависимость между независимыми переменными в регрессионной модели; представляет собой серьезную проблему при построении такой модели, поскольку является нарушением МНК.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 22 сентября 2009 г.