УДК. 614.8

Д.В. Тараканов
(Академия Государственной противопожарной службы МЧС России;
e-mail: den-pgs@rambler.ru)

МЕТОД МОДИФИКАЦИИ ВЕКТОРНОГО КРИТЕРИЯ В СИСТЕМЕ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ ПРИ ТУШЕНИИ КРУПНОГО ПОЖАРА

Аннотация. В статье приводится разработанный автором нелинейный метод модификации векторного критерия, лежащий в основе функционирования системы поддержки принятия решения при тушении крупного пожара.

Ключевые слова: управление тушением пожара, векторный критерий, наилучшее решение.

D.V. Tarakanov

METHOD OF MODIFICATION OF THE VECTOR FUNCTION A DECISION SUPPORT SYSTEM FOR FIGHTING LARGE FIRE

Abstract. This article provides an method of modifying the vector-function that underlies the decision support system for fighting large fire.

Key words: management in extinguishing the fire, the vector-function, the best solution.

Сведения об авторе

Тараканов Денис Вячеславович
адъюнкт кафедры пожарной тактики и службы
Академии ГПС МЧС России
e-mail: den-pgs@rambler.ru

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 1 апреля 2010 г.

1. Постановка задачи

Одной из важнейших проблем Государственной противопожарной службы МЧС России является предотвращение и тушение ***крупных пожаров***, материальный ущерб от которых составляет 20-30 % ущерба от всех пожаров, хотя количество крупных пожаров составляет всего 0,03-0,04 % от общего количества пожаров в стране.

Тушение каждого крупного пожара требует привлечения большого количества сил и средств, от качества управления которыми во многом зависит успех тушения. Качество управления силами и средствами на месте пожара определяется правильностью и своевременностью принимаемых решений. Для повышения качества управленческих решений, зависящих от многих критериев, автором разработана система поддержки принятия решений. В данной статье демонстрируется методическая составляющая этой системы.

В общем случае процесс принятия решения понимается как выбор наилучшей альтернативы $Sel(X)$ из исходного множества альтернатив $X = \left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\right)$. Для осуществления выбора необходимо, чтобы множество альтернатив содержало в себе больше двух элементов ($n \geq 2$). В статье рассматривается процесс выбора наилучшей альтернативы. Для поиска наилучшей альтернативы $Sel(X)$ необходимо знать, какими особенностями она должна обладать, чтобы её выбрали из множества альтернатив. Данные особенности в основном характеризуются так называемым векторным критерием $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, состоящим из локальных критериев f_i – функций, которые отражают степень превосходства одной альтернативы над другой, т.е. являются количественными. Принимается допущение о том, что лицо, принимающее решение (ЛПР), выбранной альтернативой желает максимизировать все локальные критерии, составляющие векторный критерий f [2].

Рассматривается абстрактная задача многокритериального выбора альтернатив из множества возможных альтернатив и векторного критерия.

Объединение множества возможных альтернатив и векторного критерия индуцируют множество векторных оценок альтернатив:

$$f(x^*) = \left(f_1(x^*), f_2(x^*), ..., f_m(x^*)\right),$$

где x^* – фиксированная альтернатива, $x^* \in X$.

Для поиска наилучшего решения в многокритериальной среде используется стратегия исключения, которая основана на допущении о том, что наилучшее решение необходимо искать среди недоминируемых. Предпочтения ЛПР, отданные одной из пары альтернатив, записывается следующим образом:

$$x' \succ x'', \tag{1.1}$$

где знак $\succ$ описывает предпочтения ЛПР. Запись (1.1) необходимо трактовать так: для ЛПР альтернатива x' строго предпочтительнее альтернативы x'' [2].

Отношение предпочтения ЛПР на множестве альтернатив самым непосредственным образом порождает отношение предпочтения на множестве векторных оценок, которое обозначается $\succ_m$ и определяется следующим образом:

$$x' \succ x'' \Rightarrow f(x') \succ_m f(x''). \tag{1.2}$$

В соответствии с общим определением, альтернатива является наилучшей, если она по всем локальным критериям не хуже, и хотя бы по одному строго лучше других альтернатив, то есть [3]:

$$Sel(X) = \{x^* \in X \mid \exists\, \forall x \in X \Rightarrow f(x^*) \geqq f(x)\}.$$

Если в практической задаче многокритериального выбора найдётся такая альтернатива, её и нужно считать выбранной, но что делать, когда такой альтернативы нет?

Этот вопрос является основополагающим к созданию различных методов поиска наилучшей альтернативы, зависящей от многих критериев. В настоящее время в теории принятия решения при многих критериях существует фундаментальный принцип поиска наилучшей альтернативы – это принцип Эджворта-Парето, согласно которому при разумном поведении ЛПР наилучшую альтернативу необходимо искать среди парето-оптимальных [4].

К парето-оптимальным относятся такие альтернативы, при замене которых какой-либо другой альтернативой нельзя добиться улучшения значения хотя бы одного локального критерия, не ухудшив при этом значения какого-то другого. Объединение всех таких альтернатив составляет множество Эджворта-Парето, которое определяется следующим образом [1]:

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует такаго } x \in X, \text{что } f(x) \geq f(x^*)\}.$$

Для того, чтобы найти наилучшую альтернативу, необходимо принять стратегию исключения и фундаментальный принцип Эджворта-Парето, то есть при выборе наилучшей альтернативы необходимо выполнить следующие включения [1]:

$$Sel(X) \subset P_f(X) \subset X. \tag{1.3}$$

Во многих практических случаях множество Эджворта-Парето содержит достаточно большое количество элементов, а в некоторых случаях практически не отличается от исходного множества, что требует дополнительных процедур для выбора наилучшей альтернативы [2].

Наиболее обоснованными, с позиции свободы выбора ЛПР, являются аксиоматические методы поиска наилучшей альтернативы, основанные на модификации векторного критерия информацией о предпочтениях ЛПР [4]. Определяющим в данных методах является философский принцип индукции Сократа: выявлять скрытое в человеке знание по его локальным поступкам и распространять полученное знание на всё его поведение. Аксиоматические методы предлагают провести сравнение двух альтернатив и на основе отданного ЛПР предпочтения той или иной альтернативе модифицируют векторный критерий. Модификация векторного критерия возможна двумя способами: линейный способ приводит к новому векторному критерию с большей размерностью, что усложняет процесс поиска наилучшей альтернативы; нелинейный способ уменьшает размерность векторного критерия, но теряет ряд его полезных свойств (например, дифференцируемость) [2].

В результате проведенных автором исследований выяснено, что решая локальную (с точки зрения индукции) задачу многокритериального выбора альтернатив вида

$$\left(X = \{x', x''\},\ f = (f_1, ..., f_m),\ x' \succ x''\right), \tag{1.4}$$

где x', x'' – пара парето-оптимальных альтернатив; векторный критерий $f = (f_1, ..., f_m)$, имеющий больше двух составляющих ($m > 2$), и строгое предпочтение альтернативы x' по отношению к x'', её всегда можно привести к задаче простейшего вида:

$$\left(X = \{x', x''\},\quad \rho = (\rho_1, ..., \rho_m),\quad x' \succ x''\right), \tag{1.5}$$

где $\rho = (\rho_1, ..., \rho_v)$ – простейший вид векторного критерия, для которого векторные оценки альтернатив x' и x'' имеют только две различные составляющие:

$$\rho_{\hat{i}}(x') > \rho_{\hat{i}}(x''),$$
$$\rho_{\hat{j}}(x') < \rho_{\hat{j}}(x''), \qquad (1.6)$$
$$\rho_{\hat{s}}(x') = \rho_{\hat{s}}(x'') \forall s \in \hat{I} \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\},$$

где $\hat{I}$ – номер локального критерия в простейшем векторном критерии $\rho = (\rho_1, ..., \rho_v)$;

v – размерность простейшего векторного критерия, причем $v \le m$.

Решив задачу любым из способов модификации, простейшей векторный критерий будет приведен к новому векторному критерию вида

$$g = (g_1, ..., g_v), \qquad (1.7)$$

в котором векторные оценки альтернатив x', x'' отличаются только по одной составляющей $g_{\hat{i}}(x') > g_{\hat{i}}(x'')$.

Данная составляющая векторного критерия $g = (g_1, ..., g_v)$ и является основополагающей при осуществлении выбора.

Ниже приведена одна из теорем, описывающих линейный способ модификации векторного критерия для сужения множества Эджворта-Парето.

***Теорема* 1** [2]. Предположим, что поведение ЛПР при осуществлении выбора разумное и $\hat{i}$-й критерий важнее $\hat{j}$-го с параметрами

$$\rho_{\hat{i}}(x') - \rho_{\hat{i}}(x'') = w_{\hat{i}} > 0; \ \rho_{\hat{j}}(x') - \rho_{\hat{j}}(x'') = w_{\hat{j}} < 0.$$

Тогда для любого непустого множества выбираемых альтернатив $Sel(X)$ имеют место включения

$$Sel(X) \subset P_g(X) \subset P_\rho(X), \qquad (1.8)$$

где $P_\rho(X)$ – множество возможных альтернатив, соответствующих множеству парето-оптимальных решений в простейшей многокритериальной задаче с исходным множеством возможных альтернатив $X = \{x', x''\}$ и векторным критерием $\rho = (\rho_1, ..., \rho_v)$;

$P_g(X)$ – множество возможных альтернатив, соответствующих множеству парето-оптимальных альтернатив в многокритериальной задаче с

исходным множеством возможных альтернатив $X = \{x', x''\}$ и векторным критерием $g = (g_1,...,g_v)$, составляющие которого вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} &g_{\hat{s}} = \rho_{\hat{s}} \text{ для всех } \hat{s} \in \hat{I} \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}, \\ &g_{\hat{i}} = \rho_{\hat{i}}, \\ &g_{\hat{j}} = w_{\hat{i}} \cdot \rho_{\hat{j}} - w_{\hat{j}} \cdot \rho_{\hat{i}}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Решив такую задачу вводится допущение об инвариантности отношения предпочтения ЛПР, то есть о возможности распространения полученного знания на все остальные альтернативы, составляющие исходное множество. Признаком инвариантности отношения $\succ$ является наличие у него свойств аддитивности и однородности. В этом и заключается принцип индукции, используемый в данном подходе к решению многокритериальных задач.

Далее в статье изложенно существо разработанного автором метода сведения исходного векторного критерия к простейшему для однозначного решения задачи многокритериального выбора альтернатив.

2. Модификация исходного векторного критерия к простейшему виду

Итак, ЛПР однозначно решило локальную задачу многокритериального выбора, т.е. среди двух парето-оптимальных альтернатив $x', x'' \in X$ выбрало решение x' и не выбрало решение x'', т.е. $x' \succ x''$.

Пусть I – номера критериев в векторном критерии $f = (f_1,..., f_m)$. В соответствии с определением множества Эджворта-Парето, должны найтись такие номера $i \in I$ критериев, по которым выбранной альтернативой получены некоторые "прибавки", по сравнению с невыбранной, то есть

$$f_i(x') - f_i(x'') = w_i > 0. \tag{2.1}$$

В то же время существуют такие номера критерия $j \in I$, по которым, наоборот, получены "проигрыши", по сравнению с невыбранной альтернативой, то есть

$$f_j(x') - f_j(x'') = w_j < 0. \tag{2.2}$$

В общем случае могут существовать такие номера критериев, по которым оценки данных альтернатив равны:

$$f_s(x') - f_s(x'') = 0. \qquad (2.3)$$

Это значит, что для данной пары критерии с номерами s не имеют влияния на выбор альтернативы.

Если ЛПР из двух парето-оптимальных альтернатив выбрало x' и не выбрало x'', то это можно трактовать следующим образом: для ЛПР "прибавки" по локальным критериям с номерами i важнее "проигрышей" по локальным критериям с номерами j. При этом ЛПР заинтересовано в получении как можно больших "прибавок" по критериям с номерами i и как можно меньших "проигрышей" по критериям с номерами j [2].

Критерии с номерами i объединяют в группу $A \subset I$ (выигрышных критериев), а критерии с номерами j – в группу $B \subset I$. Очевидно, что при выборе одной из парето-оптимальных альтернатив $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ и $A \cap B = \varnothing$ все остальные критерии с номерами, не принадлежащими *A, B,* принадлежат группе *S*, то есть $S = I \setminus (A \cup B)$.

Вводится новая нумерацию критериев в полученных группах: сохраняя номер критерия из *I*, к нему добавляют номер *k* – порядковый номер критерия в группе *A,* (пусть *p* – количество критериев в группе *A*, тогда *k* = 1, 2,…, *p*) и номер *l* – порядковый номер критерия из группы *B* (*q* – количество критериев в группе *B*, следовательно *l* = 1, 2, …, *q*).

Итак, для любого акта выбора одной среди двух парето-оптимальных альтернатив возможен один из следующих четырех случаев:

1) p=1 и q=1; 2) p=1 и q>1;
2) p>1 и q=1; 4) p>1 и q>1.

В первом случае – если в данные группы попало лишь по одному критерию, т.е. q = 1 и p = 1, то такой исходный векторный критерий удовлетворяет требованиям (1.6) и считается простейшим. Ясно, что никаких дополнительных его преобразований не требуется. Но если имеют место остальные три случая, то исходный векторный критерий можно упростить.

Пусть p>1, тогда имеется набор "выигрышей" w_{ik} по критериям с номерами k = 1, 2, …, p. При этом принимается допущение о том, что критерии вносят различный вклад в группу *A* пропорционально значению своего "выигрыша", отнесенного к сумме всех выигрышей по критериям группы *A*.

Вводится понятие "коэффициента значимости" критерия внутри группы A:

$$\theta_{ik} = \frac{w_{ik}}{\sum_{k=1}^{p} w_{ik}}. \qquad (2.4)$$

Внутри группы A "коэффициент значимости" критерия тем больше, чем больше "выигрыш" по данному критерию. Свои значения "коэффициент значимости" принимает из интервала (0, 1).

Тогда в силу теоремы Ю.Б. Гермейера [3] группа критериев A заменяется нелинейной функцией:

$$F_A = \min_{k=1,\ldots,p} \theta_{ik} \cdot f_{ik} \qquad (2.5)$$

Рассматриваются критерии группы B. ЛПР заинтересован минимизировать "проигрыши", значит вклад критерия в группе обратно пропорционален отношению "проигрыша" по данному критерию к сумме всех "проигрышей" из группы B. Тогда весовой коэффициент критерия из группы B будет называться "коэффициентом пренебрежения" и определяться следующим образом:

$$\theta_{jl} = \frac{1}{q-1}\left(1 - \frac{w_{jl}}{\sum_{l=1}^{q} w_{jl}}\right). \qquad (2.6)$$

Свои значения "коэффициент пренебрежения" принимает из интервала (0, 1).

Тогда группа критериев А заменяется нелинейной функцией:

$$F_B = \min_{l=1,\ldots,q} \theta_{jl} \cdot f_{jl}. \qquad (2.7)$$

После того, как получены "нелинейный критерий выигрыша" F_A и "нелинейный критерий проигрыша" F_B, можно заменить критерии группы A одним критерием F_A, а критерии группы B критерием F_B и получить простейший векторный критерий, локальными критериями в котором будут

все критерии группы S и нелинейные критерии F_A и F_B. Размерность простейшего векторного критерия определяется по формуле:

$$v = m - q - p + 2, \tag{2.8}$$

где m – размерность векторного критерия f;

p – количество критериев в группе A;

q – количество критериев в группе B.

Ниже рассмотрен полученный простейший векторный критерий $\rho = (\rho_1, ..., \rho_v)$, в котором $\rho_{\hat{s}} = f_s$, $\rho_{\hat{i}} = F_A$, $\rho_{\hat{j}} = F_B$.

Очевидно, что для данного критерия выполняется требование (1.6):

$$F_A(x') > F_A(x'');$$
$$F_B(x') < F_B(x'');$$
$$f_s(x') = f_s(x'') \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Если $w_{\hat{i}} > 0$ и $w_{\hat{j}} < 0$, то эти значения можно использовать для поиска наилучшего решения по теореме 1. Сформированный векторный критерий является простейшим.

3. Пример

Пусть перед ЛПР стоит задача оптимального выбора одной из четырех альтернатив $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$, оцененных по шести критериям $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ (табл. 1).

Таблица 1

Задача многокритериального выбора наилучшего решения

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$
f_1	0,00	0,25	0,10	0,40
f_2	1,00	0,00	0,30	0,20
f_3	1,00	0,25	0,60	0,00
f_4	0,30	0,70	0,80	0,30
f_5	0,00	1,00	0,10	1,00
f_6	1,00	1,00	0,70	0,80

Все решения, приведённые в табл. 1, принадлежат множеству Эджворта-Парето, построенному по векторному критерию f на множестве альтернатив X. Чтобы решить задачу выбора, будет использован предложенный способ.

ЛПР из пары альтернатив $x^{(1)}, x^{(2)}$ отдаёт свои предпочтения решению $x^{(1)}$. Эта информация по стратегии исключения говорит о том, что решение $x^{(2)}$ не может оказаться выбранным. Формализуются предпочтения ЛПР. Для этого из векторной оценки альтернативы $f\left(x^{(1)}\right)$ вычитается векторная оценка $f\left(x^{(2)}\right)$. Данные сводятся в табл. 2.

Таблица 2

Локальная задача многокритериального выбора решения

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$w = f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})$	θ	Группы
f_1	0,00	0,25	-0,25	0,42	*B*
f_2	1,00	0,00	1,00	0,57	*A*
f_3	1,00	0,25	0,75	0,43	*A*
f_4	0,30	0,70	-0,40	0,38	*B*
f_5	0,00	1,00	-1,00	0,20	*B*
f_6	1,00	1,00	0,00	*S*	*S*

В последнем столбце табл. 2 проставлены группы критериев согласно принципам, описываемым формулами (2.1)-(2.3).

Для каждой группы критериев вычисляются "коэффициенты важности": по формулам (2.6) – для группы *B* и (2.4) – для группы *A*. Например, вычисляются "коэффициент пренебрежения" в группе *B* для критерия f_{42}:

$$\theta_{42} = \frac{1}{3-1}\left(1 - \frac{w_{42}}{w_{11} + w_{42} + w_{53}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0{,}4}{0{,}25 + 0{,}4 + 1}\right) = 0{,}38$$

и "коэффициент значимости" для критерия f_{21}:

$$\theta_{21} = \frac{w_{21}}{w_{21} + w_{32}} = \frac{1{,}00}{1{,}00 + 0{,}75} = 0{,}57\,.$$

После того, как выяснена информация о предпочтениях ЛПР, необходимо упростить векторный критерий f до простейшего векторного критерия. Составляющие векторного критерия f делятся на группы. В табл. 3 приведены критерии группы *B*. Для них по формуле (2.7) определяется обобщенная нелинейная функция.

Таблица 3

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$
$f_{11} \cdot Q_{11}$	0,00	0,11	0,04	0,17
$f_{42} \cdot Q_{42}$	0,11	0,27	0,30	0,11
$f_{53} \cdot Q_{53}$	0,00	0,20	0,02	0,20
$F_B = \min\limits_{l=1,2,3} f_{jl} \cdot \theta_{jl}$	0,00	0,11	0,02	0,11

Аналогичным образом поступают с критериями группы A: по формуле (2.5) получают обобщенный критерий F_A (табл. 4).

Таблица 4

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$
$f_{21} \cdot Q_{21}$	0,57	0,00	0,17	0,11
$f_{32} \cdot Q_{32}$	0,43	0,11	0,26	0,00
$F_A = \min\limits_{k=1,2} f_{jk} \cdot \theta_{jk}$	0,43	0,00	0,17	0,00

Формируется простейший векторный критерий $\rho = (F_A, F_B, f_6)$. Переоцененные по нему альтернативы $x^{(1)}, x^{(2)}$ сведены в табл. 5.

Таблица 5

Простейшая задача многокритериального выбора решений

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$w_{\hat{i}} = F_i(x^{(1)}) - F_i(x^{(2)})$
F_A	0,43	0,00	0,43
F_B	0,00	0,11	-0,11
f_6	1,00	1,00	0,00

В последнем столбце приведены "глобальный выигрыш" и "глобальный проигрыш".

В соответствии с теоремой 1 векторный критерий $\rho = (F_A, F_B, f_6)$ преобразуется в новый векторный критерий

$$g = \left(g_1 = F_A, \quad g_2 = \left(w_{\hat{i}} F_B - w_{\hat{j}} F_A\right), \quad g_3 = f_6\right).$$

С учётом полученных формул производится переоценка альтернатив из множества X, данные сведены в табл. 6.

Таблица 6

Новая задача многокритериального выбора решений

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$
g_1	**0,43**	0,00	0,17	0,00
g_2	**0,05**	0,05	0,03	0,05
g_3	**1,00**	1,00	0,70	0,80

Из табл. 6 видно, что множеству Эджворта-Парето по новому векторному критерию $g = (g_1, g_2, g_3)$ принадлежит только альтернатива $x^{(1)}$, она и является наилучшей.

4. Заключение

Использование метода сведения векторного критерия к простейшему позволяет преобразовать локальную задачу многокритериального выбора альтернатив и, используя метод модификации векторного критерия, решить эту задачу. Достоинством приведенного в статье способа поиска наилучшей альтернативы с использованием разработанного автором метода является упрощение исходной задачи за счёт сокращения составляющих векторного критерия.

В примере приведена задача, для решения которой достаточно одного вычислительного цикла. В общем случае вычислительных циклов может быть несколько. Следует иметь в виду, что после первого цикла будут удалены не удовлетворяющие ЛПР альтернативы, но полученное новое множество Эджворта-Парето будет содержать больше двух альтернатив, так вот сравнение новой пары парето-оптимальных альтернатив необходимо производить по старому векторному критерию, так как новый векторный критерий $g = (g_1, \ldots, g_v)$, записанный как комбинация составляющих векторного критерия $f = (f_1, \ldots, f_m)$, теряет их физическую природу. Приведенный выше метод является методической составляющей разработанной автором системы поддержки принятия решения.

Литература

1. **Брушлинский Н.Н., Соколов С.В., Вагнер П.** Человечество и пожары. М.: ООО "ИПЦ Маска", 2007. 142 с.

2. **Ногин В.Д.** Принятие решения в многокритериальной среде: количественный подход. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 144 с.

3. **Подиновский В.В., Ногин В.Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – 2-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 256 с.

4. **Ларичев О.И.** Теория и методы принятия решений. М.: Университетская книга, Логос, 2008. 392 с.