М.Г. Дмитриев
(Российский государственный социальный университет;
e-mail: mdmitriev@mail.ru)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ МНОГИХ КРИТЕРИЕВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Аннотация. Разработана линейная свертка гладких критериев – функций многих переменных. С помощью малого параметра выделяется главный (базовый) критерий, уточняется базовая альтернатива, устанавливается точность альтернативы первого порядка. Материал представляет интерес для решения проблем техносферной безопасности.

Ключевые слова: задача, критерий, малый параметр, решение.

M.G. Dmitriev

NEAR DECISION OF THE PROBLEM TO OPTIMIZATION FOR LINEAR FOLDING OF THE MANY CRITERION ON BASE OF THE METHOD OF THE SMALL PARAMETER

Abstract. Designed linear folding smooth criterion - a function many variable. By means of small parameter stands out main (base) criterion, is elaborated base alternative, is fixed accuracy of the first-order alternative. The Material bes of interest for decision of the problems техносферной to safety.

Key words: problem, criterion, small parameter, decision.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 5 мая 2010 г.

При моделировании процессов принятия рациональных решений в реальных задачах, как правило, появляются многокритериальные задачи оптимизации, где множественность критериев отражает наличие множества целей, интересов. Попытка получить решение, одновременно лучшее по всем критериям (а это возможно только в частных случаях), приводит, в общем случае, к формированию некоторого рационального выбора альтернатив.

Один из распространенных приемов устранения неопределенности целей выбора – сведение многокритериальной задачи оптимизации к соответствующей скалярной. В литературе имеется много подходов к решению задачи "скаляризации" критериев [1-4] и один из них есть линейная свертка критериев.

Пусть, например, имеем задачу:

$$I_k(x) \to \max_{x \in X}, k = 1, \ldots, m ,$$

где $X \subseteq R^n$ - множество альтернатив, тогда линейная свертка имеет вид

$$I(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k I_k(x) \to \max_{x \in X},$$
$$c_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} c_k = 1 \quad (1)$$

В литературе имеются различные подходы к определению весов критериев, и в общем случае их определение является слабоформализованной задачей. В настоящей статье предполагается, что веса критериев известны, и теперь переходим к задаче (1). Для простоты будем считать, что в (1) первый критерий является доминирующим (главным), т.е. $c_1 > c_k, k \neq 1$.

В общем случае, полученная однокритериальная задача оптимизации (1) может быть достаточно сложной и поэтому, как правило, решается приближенно.

Рассмотрим приближенный метод, связанный с асимптотическим анализом однокритериальной задачи, на основе введения в систему весов критериев так называемого малого параметра.

Будем считать, что $c_k = \alpha_k \cdot \varepsilon, k \neq 1, \alpha_k > 0$ и между α_k имеется соответствующая упорядоченность. Числовые, конкретные значения малого положительного параметра $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1$ и множителей α_k вводятся с помощью соотношений

$$c_1 + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k \cdot \varepsilon = 1, c_k = \alpha_k \cdot \varepsilon, k \neq 1, \alpha_k > 0,$$

т.е. в пространстве критериев получаем регулярно возмущенную задачу

$$I_\varepsilon(x) = c_1 \cdot I_1(x) + \sum_{k=2}^{m} \varepsilon \cdot \alpha_k \cdot I_k(x) \to \max_{x \in X}. \quad (2)$$

Решение задачи зависит от малого параметра ε. Предположим, что выполнены следующие условия.

1. Множество X – открытое множество в пространстве R^n и все функции-критерии – достаточно гладкие функции своих переменных.

2. Функция-критерий $I_1(x)$ сильно вогнутая.

Так как все критерии – гладкие функции, тогда можно на основе так называемой прямой схемы [5, 6], используя регулярное разложение решения и соответствующее разложение критерия $I_\varepsilon(x)$ в ряд по целым степеням ε, построить серию задач максимизации для членов разложения $I_\varepsilon(x)$.

Итак, пусть

$$x(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon \cdot x^1 + \ldots \in X. \quad (3)$$

Тогда, подставляя (3) в (2) и раскладывая $I_\varepsilon(x)$ в ряд по степеням ε, имеем

$$I_\varepsilon(x) = I^0(x^0) + \varepsilon \cdot I^1(x^0) + \varepsilon^2 \cdot I^2(x^1) + \ldots . \to \max_{x^0, x^1, \ldots \in X} \quad (4)$$

или

$$I_{\varepsilon}(x) = c_1(I_1(x^0) + \varepsilon \cdot (\frac{\partial I_1(x^0)}{\partial x})^T x^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot (x^1)^T \frac{\partial^2 I_1(x^0)}{\partial x^2} x^1 + ...) +$$
$$\varepsilon \cdot (\sum_{k=2}^{m} \alpha_k I_k(x^0) + \varepsilon \sum_{k=2}^{m} \alpha_k (\frac{\partial I_k(x^0)}{\partial x})^T x^1 + ...) = c_1 I_1(x^0) + \varepsilon[c_1(\frac{\partial I_1(x^0)}{\partial x})^T x^1 +$$
$$\sum_{k=2}^{m} \alpha_k I_k(x^0)] + \varepsilon^2 \{\frac{c_1}{2}(x^1)^T \frac{\partial^2 I_1(x^0)}{\partial x^2} x^1 + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k (\frac{\partial I_k(x^0)}{\partial x})^T x^1\} + O(\varepsilon^3) = \quad \textbf{(5)}$$
$$c_1 I_1(x^0) + \varepsilon \sum_{k=2}^{m} \alpha_k I_k(x^0) + \varepsilon^2 \{\frac{c_1}{2}(x^1)^T \frac{\partial^2 I_1(x^0)}{\partial x^2} x^1 + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k (\frac{\partial I_k(x^0)}{\partial x})^T x^1\} +$$
$$\varepsilon^3 h(x^0, x^1) + O(\varepsilon^4) \to \max_{x^0, x^1, ... \in X}$$

Здесь $h(x^0, x^1)$ известная функция своих аргументов. На основе леммы о перестановке операции максимизации с разложением в регулярный ряд [5, 6], при четных степенях параметра здесь последовательно получаются оптимизационные задачи для x^0, x^1 и т.д., а при нечётных степенях параметра получаем известные функции предыдущих приближений.

Из последнего представления получаем, что главный вклад в искомую оптимальную альтернативу $x(\varepsilon)$ вносит решение задачи

$$I^0(x^0) = c_1 \cdot I_1(x) \to \max_{x^0 \in X}, \tag{6}$$

где последнее выражение – главная часть критерия (2).

Из (5) следует, что для нахождения x^1 имеем задачу

$$\frac{1}{2}c_1(x^1)^T \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2}(x^0)x^1 + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k (\frac{\partial I_k}{\partial x}(x^0))^T x^1 \to \max_{x^1}. \tag{7}$$

Из условия 2 следует, что гессиан функции $I_1(x)$ – отрицательно определенная матрица и поэтому решение (6) имеет вид

$$x^1 = -(\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2}(x^0))^{-1} \sum_{k=2}^{m} \frac{\alpha_k}{c_1} \frac{\partial I_k}{\partial x}(x^0). \tag{8}$$

Субоптимальная альтернатива получается из (3), (8) и имеет вид

$$\tilde{x}(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon \cdot x^1. \tag{9}$$

Теперь, используя традиционные рассуждения прямой схемы исследования вариационных задач методом малого параметра [5, 6], нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема. *Если при выполнении условий* 1, 2 *существует достаточно малое* ε_0, *что при всех* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ $\tilde{x}(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon \cdot x^1 \in X$, *тогда выполняется следующее:*

1. $I_{\varepsilon}(x^0) \le I_{\varepsilon}(\tilde{x}(\varepsilon))$, *причём неравенство строгое, если* $x^1 \ne 0$;
2. $I_{\varepsilon}^* - I_{\varepsilon}(\tilde{x}(\varepsilon)) \le C\varepsilon^4$, *где C > 0 - некоторая постоянная,* $I_{\varepsilon}^* = \max_{x \in X} I_{\varepsilon}(x)$.

Доказательство. Разложим $I_\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon))$ в ряд по малому параметру с точностью до $O(\varepsilon^4)$. Получим разложения вида (5), где все члены разложения до третьего порядка включительно совпадают с соответствующим разложением $I_\varepsilon^* = I_\varepsilon(x_\varepsilon^*)$ (здесь x_ε^* точное решение задачи (2)) и только член разложения $I_\varepsilon(x_\varepsilon^*)$ четвертого порядка не хуже или лучше (больше или равен) такого же члена в разложении $I_\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon))$, что следует из оптимизационной природы членов разложения $I_\varepsilon^* = I_\varepsilon(x_\varepsilon^*)$. Отсюда очевидно следует второе утверждение. А для доказательства первого утверждения достаточно сравнить асимптотические разложения $I_\varepsilon(x^0)$ и $I_\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon))$, у которых совпадают только два первых члена, а член при ε^2 у разложения $I_\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon))$ больше или равен по определению.

Итак, главная линейная часть поправки по ε в показатель эффективности вносит предельная альтернатива x^0 (назовем её базовой), выбранная по главному критерию. Причем эта линейная поправка формируется с помощью значений всех остальных критериев на этой базовой альтернативе. Действительно, линейная поправка Δ, в силу необходимых условий оптимальности в базовой задаче, равна $\Delta = \varepsilon \cdot I^1(x^0) = \sum_{k=2}^{m} \varepsilon \cdot \alpha_k \cdot I_k(x^0)$. Таким образом, несмотря на малый вклад x^1 в общую эффективность, эта коррекционная альтернатива может существенно, в силу (3), влиять на изменение базовой альтернативы, приближая её к оптимальной.

Базовая альтернатива, с одной стороны, для своего определения не требует учета других критериев, но, с другой стороны, позволяет определить главную часть влияния на общую эффективность всех остальных критериев вместе и каждого критерия по отдельности.

Следующий член в представлении (4) - $\varepsilon^2 \cdot I^2(x^1)$ вносит существенно меньший (на порядок по ε) вклад в общий критерий эффективности, но формируется на основе определения альтернативы x^1, которая максимизирует квадратичный критерий, порождаемого гессианом базового и градиентами остальных критериев. Так как в общем случае базовая альтернатива не является оптимальной для небазовых критериев, величины норм их градиентов говорят о степени пренебрежения базовой альтернативой целей, формируемых небазовыми критериями. Поэтому указанная степень пренебрежения порождает соответствующие изменения базовой альтернативы. Чем больше степень пренебрежения каким то критерием, тем больше соответствующая реакция в x^1 и, в результате коррекции, полученная улучшенная, субоптимальная альтернатива (8) обладает большей "толерантностью" ко всем критериям.

Сравнение норм векторов $\frac{\alpha_k}{c_1}\frac{\partial I_k}{\partial x}(x^0), k = 2,...,m$ позволяет говорить о ранжировании небазовых критериев между собой с точки зрения альтернативы x^0 и это ранжирование может не совпадать с первоначальным, на основе введенных весов.

Иначе говоря, асимптотический анализ линейной свертки последовательно в приближениях воссоздает своеобразный механизм отрицательной обратной связи – происходит учет влияния небазовых критериев, который уменьшает значение базового критерия, или на "ошибку" в предыдущем приближении появляется отрицательная реакция в следующем приближении, сглаживающая ситуацию и, таким образом, в линейной свертке многих критериев последовательно учитываются интересы всех сторон в процессе принятия решений.

Отметим, что предложенный здесь формализм является достаточно удобной вычислительной технологией для решения многокритериальных задач на основе идеи главного критерия, так как зачастую, в приложениях, введение малого параметра порождает сходящиеся ряды при конечных, реальных значениях параметра. Но требование малости соответствующего параметра накладывает и определенные ограничения на класс рассматриваемых задач. Так, например, в (9) не для любого значения малого параметра получаемая альтернатива $\tilde{x}(\varepsilon)$ принадлежит множеству *X*.

Пример. Пусть рассматриваются три задачи максимизации:

$$I_1(x) = -0.5(x_1^2 + x_2^2) \to \max,$$

$$I_2(x) = -0.5((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2) \to \max,$$

$$I_3(x) = -0.5((x_1-2)^2 + (x_2-2)^2) \to \max$$

и для линейной свертки предложены веса $c_1 = 0,6$, $c_2 = 0,3$, $c_3 = 0,1$. Имеем

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x_1} = -0.6x_1 - 0.3(x_1-1) - 0.1(x_1-2) = 0$$

$$I(x) = \sum_{k=1}^{3} c_k I_k(x) = -0.3(x_1^2 + x_1^2) - 0.15((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2) -$$

$$-0.05((x_1-2)^2 + (x_2-2)^2) \to \max_{x \in X}.$$

и пусть при этом $\varepsilon = 0.1, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1$, тогда

$$I(x) = I_\varepsilon(x) = I_1(x) + \varepsilon \sum_{k=2}^{3} \alpha_k I_k(x) \to \max_{x \in X}.$$

Необходимые условия оптимальности для точного решения $x^*(\varepsilon)$ в задаче на максимум линейной свертки (2) имеют вид:

$$\frac{\partial I_\varepsilon(x)}{\partial x_1} = -0.6x_1 - 0.3(x_1-1) - 0.1(x_1-2) = 0,$$

$$\frac{\partial I_\varepsilon(x)}{\partial x_2} = -0.6x_2 - 0.3(x_2-1) - 0.1(x_2-2) = 0,$$

т.е. $x^*(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ и оптимальное значение функционала линейной свертки

$I(x^*(\varepsilon)) = -0.45$. Базовое решение, очевидное – $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и вдоль него линейная свертка принимает значение $I_\varepsilon(x^0) = -1$. Вычислим градиенты всех частных критериев и гессиан базового критерия. Имеем

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \frac{\partial I_2}{\partial x} = -\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}, \frac{\partial I_3}{\partial x} = -\begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix}, \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее по формуле (8) находим

$$x^1 = -(\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2}(x^0))^{-1} \sum_{k=2}^{m} \frac{\alpha_k}{c_1} \frac{\partial I_k}{\partial x}(x^0) = \{\frac{3}{0.6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{0.6}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\} =$$

$$= 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1.66667\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.33334 \\ 8.33334 \end{pmatrix}.$$

Теперь из (9) следует, что

$$\tilde{x}(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon \cdot x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1\begin{pmatrix} 8.33334 \\ 8.33334 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.833334 \\ 0.833334 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя $I_\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon)) = -0.561$, замечаем, что $I_\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon)) = -0.561 > I_\varepsilon(x^0) = -1$, т.е. с ростом номера асимптотического приближения растет точность и при этом значение критерия улучшается почти в два раза.

Литература

1. **Моисеев Н.Н.** Математические задачи системного анализа. М.: Наука. 1981. 488 с.

2. **Ларичев О.И.** Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах: Учебник. М.: Логос, 2000. 296 с.

3. **Катулев А.Н., Северцев Н.А., Соломаха Г.М.** Исследование операций и обеспечение безопасности. Прикладные задачи. М.: Физматлит. 2005. 240 с.

4. **Multiple** criteria decision analysis: state of the art surveys. Edited by J. Figueira**,** S. Greco, M. Ehrgott, Springer. 2004. 1085 p.

5. **Dmitriev M.G., Belokopytov S.V.** Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions. Systems and Control letters, v. 8, №2, 1986, North Holland. – pp.129-135

6. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982-2004 гг. // Автоматика и телемеханика, 2006, №1. С. 3-53.