Б.М. Пранов
(Академия Государственной противопожарной службы МЧС России;
e-mail: info@academygps.ru)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ РЕСУРСОВ В СИСТЕМАХ БЕЗОПАСНОСТИ

Аннотация. Сформулированы задачи оптимального размещения ресурсов. Показано, что их дискретный вариант является задачей линейного программирования. Представлен алгоритм решения дискретной задачи.

Ключевые слова: задача, ресурсы, оптимальное размещение.

B.M. Pranov

MATHEMATICAL MODELING OF THE OPTIMUM ACCOMODATION RESOURCE IN SAFETY SYSTEM

Abstract. Problems of the optimum accomodation resource. Shown that their discrete variant is a problem of the linear programming. Presented algorithm of the decision of the discrete problem.

Key words: problem, facility, optimum accomodation.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 5 мая 2010 г.

Задача о покрытии плоской области минимальным числом кругов данного радиуса хорошо известна как в серьезной математической литературе [1, 2], так и в математическом фольклоре [3]. Точное решение этой задачи имеется лишь для бесконечной плоскости, а также для ряда ограниченных областей специального вида.

Естественное обобщение первоначальной формулировки приводит к постановке ряда важных практических задач. Пусть, например, G – плоская связная ограниченная замкнутая область, представляющая собой план некоторого города (или района). Область G можно считать многосвязной. Введем следующие предположения: 1) для любых точек $x, y \in G$ определено расстояние $d(x, y)$, являющееся непрерывной функцией своих аргументов; 2) для любой точки $x \in G$ определены два положительных числа r_x и m_x (не обязательно непрерывно зависящие от x, но отделенные снизу от нуля, а также ограниченные в целом по области).

Для пожарной охраны, например, представляет интерес следующая формулировка. Каким образом следует разместить пожарные депо в пределах области G и определить число пожарных автомобилей в каждом из них, чтобы в r_x-окрестности любой точки $x \in G$ находилось не менее m_x пожарных автомобилей, причем суммарное количество автомобилей во всей области G было бы минимальным? Полагая $r_x = R = \text{const}$, а $m_x = 1$ для всех точек $x \in G$, мы возвращаемся к задаче о минимальном покрытии области G кругами радиуса R.

Аналогичная постановка представляет интерес и для ряда других отраслей – аварийных служб (милиция, скорая медицинская помощь, аварийная газовая служба), технического обслуживания автомобилей или их заправки и т. д.

Дальнейшие обобщения могут привести к рассмотрению области, расположенной в евклидовом пространстве R^n или в локально компактном метрическом пространстве (вопрос о минимальном числе дескрипторов, достаточном для описания каждого объекта некоторой предметной области, компактно принадлежащей полному пространству описателей).

В настоящей статье показано, что задачи такого рода имеют решение, приведена дискретная формулировка, а также представлен алгоритм для реализации решения на ЭВМ.

1. Решение задачи размещения распределенной массы

Приведём прежде всего более общую постановку задачи. Пусть G – замкнутая область в R^n (не уточняя в дальнейшем, будем считать G достаточно "хорошей", например, компактным связным полиэдром), а $d(x, y)$ – непрерывная метрика на G. Предположим также, что для каждой точки $x \in G$ заданы два положительных числа r_x и m_x (будем считать, что в целом по области они отделены от нуля снизу и ограничены сверху). Положим

$$D_x = \{y \in G \mid d(x, y) \le r_x\}, \tag{1.1}$$

(т.е. D_x есть r_x-окрестность точки x). Под распределением далее подразумевается локально интегрируемая мера μ на G.

Задача 1. Найти такое неотрицательное распределение μ на G, чтобы

(a) для любой точки $x \in G$ выполнялось неравенство

$$\int_{D_x} d\mu \ge m_x; \tag{1.2}$$

($б$) величина

$$M = \int_G d\mu \tag{1.3}$$

имела наименьшее возможное значение.

Определение 1. Назовем распределение μ допустимым, если неравенство (1.2) выполняется для всех $x \in G$. Допустимое распределение μ называется оптимальным, если величина (1.3) минимальна.

Теорема 1. Решение задачи 1 существует.

Доказательство. Прежде всего покажем, что существуют допустимые распределения. Пусть $M = \sup_G m_x$, $r = \inf_G m_x$. Построим открытое покрытие области G, описывая вокруг каждой точки $x \in G$ шар радиусом $r/2$. Используя компактность G, выберем конечную систему $\{D_i\}$ шаров, также покрывающих G целиком. Ясно, что в r-окрестности любой точки $x \in G$ полностью содержится один из шаров выбранной системы (а именно тот, который содержит точку x). На каждом из шаров системы $\{D_i\}$ построим распределение μ_i (например, равномерное), имеющее массу M. Тогда сумма $\mu = \sum_i \mu_i$ является допустимым распределением.

Рассмотрим теперь множество всех допустимых распределений, носители которых принадлежат множеству G (или некоторому объемлющему его фиксированному компактному множеству). Положим

$$\mathrm{M}_0 = \inf_{\mu} \int_G d\mu\,,$$

где нижняя грань берется по всем таким распределениям. Это означает, что найдется последовательность $\{\mu_k\}$ допустимых распределений, для которой

$$M_0 = \lim_{k\to\infty} \int_G d\mu_k\,.$$

В таком случае теорема Прохорова [4, с. 338] позволяет установить существование предельной меры μ_0, которая удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3) одновременно.

Теорема 2. Множество допустимых (или оптимальных) распределений является выпуклым.

Доказательство. Пусть распределения μ_1, μ_2 допустимы, $0 \le \alpha \le 1$, $\mu = \alpha\cdot\mu_1 + (1 - \alpha)\cdot\mu_2$. В таком случае распределение μ также допустимо. Действительно, для любой точки $x \in G$

$$\int_{D_x} d\mu = \int_{D_x} d(\alpha\cdot\mu_1 + (1-\alpha)\cdot\mu_2) =$$

$$= \alpha\cdot\int_{D_x} d\mu_1 + (1-\alpha)\cdot\int_{D_x} d\mu_2 \ge \alpha\cdot m_x + (1-\alpha)\cdot m_x = m_x\,.$$

Легко проверяется, что если μ_1 и μ_2 оптимальны, то и μ также оптимальна.

Замечание 1. Оптимальная мера μ_0 (решение задачи 1), существование которой установлено в теореме 1, не обладает какими-либо специфическими свойствами, с помощью которых её можно было бы построить. На основании теории Радона-Никодима можно лишь утверждать, что эта мера, вообще говоря, разлагается в сумму абсолютно интегрируемой, дискретной и сингулярной компонент. Более того, оптимальных мер может оказаться бесконечно много, и они в совокупности будут образовывать некоторое выпуклое подмножество в множестве всех допустимых мер (теорема 2). В доказательстве теоремы 1 можно было бы ограничиться классом допустимых дискретных мер (тогда и оптимальная мера μ_0 оказалась бы дискретной), но соображения о неоднозначности решения все равно остаются.

2. Дискретный вариант задачи

Зная о том, что решение задачи 1 существует в виде непрерывно распределенной меры, построим дискретный аналог формулировки. Это позволит предложить алгоритмы для реализации на ЭВМ решения соответствующей задачи, а также проанализировать оценки погрешностей в задачах практических приложений.

Итак, пусть G – компактное подмножество метрического пространства, а $\{g_i\}$, $i \in \overline{1,n}$, – какая-нибудь его ε-сеть (т.е. такое конечное подмножество, что расстояние от любой точки $x \in G$ до какой-нибудь из точек g_i не превосходит ε). Для любого $\varepsilon > 0$ конечные ε-сети существуют – достаточно взять центры произвольного конечного покрытия множества G шарами радиуса ε. Можно поступить также следующим образом. Опишем вокруг множества $G \subset R^m$ прямоугольный параллелепипед V, грани которого параллельны координатным гиперплоскостям в R^m, и в качестве ε-сети возьмем вершины достаточно мелкого разрезания V на малые параллелепипеды.

Заменим теперь в формулировке задачи 1 множество G на некоторую его ε-сеть $E = \{g_i\}$. Множество номеров всех тех точек g_j, которые принадлежат r_i-окрестности точки g_i обозначим через H_i. Поэтому аналогом r_i-окрестности точки g_i является множество

$$E_i = \{g_j \mid j \in H_i\}.$$

Поскольку в данном случае множество E конечно, то всякое распределение μ на нем есть не что иное, как набор неотрицательных чисел $\mu = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – по одному для каждой точки $g_i \in E$. Сформулируем теперь соответствующий дискретный аналог задачи 1.

Задача 2. Пусть заданы конечное множество $\bar{E} = \{g_i\}$, $i \in \overline{1, n}$, наборы $\{r_i\}$, $\{m_i\}$, $i \in \overline{1, n}$, положительных чисел, а также совокупность $\{H_i\}$, $i \in \overline{1, n}$, подмножеств множества (1, 2, ..., n) (H_i есть совокупность номеров всех тех g_j, которые удалены от g_i не более чем на r_i). Найти такой вектор $\mu = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, для которого функционал

$$M = M(\mu) = x_1 + x_2 + ... + x_n \tag{2.1}$$

достигает наименьшего значения при наличии ограничений

$$x_i \geq 0,\ i \in \overline{1, n}; \tag{2.2}$$

$$\sum_{j \in H_i} x_j \geq m_i,\ \mathrm{i} \in \overline{1, \mathrm{n}}. \tag{2.3}$$

Сформулированная таким образом, задача 2 является задачей линейного программирования в стандартной постановке [5, с. 63].

Замечание 2. Вопрос о существовании допустимого распределения решается сразу – достаточно положить $\mu = \{m_i\}$ и неравенства (2.2) и (2.3) выполняются.

Основным в данной ситуации становится выбор метода решения. Обычно задачи линейного программирования решаются симплекс-методом. При его реализации ограничения-неравенства типа (2.3) доводятся до ограничений-равенств путем введения фиктивных переменных, число которых равно числу неравенств (2.3). Если число ограничений-неравенств равно числу переменных (а в задаче 2 дело обстоит именно так), то такие задачи линейного программирования называются большими, и для их решения в общем случае необходимо разместить в памяти ЭВМ квадратную матрицу порядка $2 \cdot n$, а также соответствующую обратную матрицу (т.е. требуется объем памяти порядка $C \cdot n^2$, где константа C имеет величину порядка 50). Для персональных ЭВМ практически реализуемыми являются задачи с числом переменных $n \leq 1000$ [6, с. 38]. Увеличение числа переменных при применении симплекс-метода приводит к двум нежелательным эффектам: 1) необходимости детального анализа матрицы ограничений и организации в ней специальной блочной структуры; 2) использования виртуальной памяти ЭВМ значительного объема, в результате чего процессы обмена информацией с внешними устройствами (дисками) существенно увеличивают работу программы и могут сделать задачу "нерешаемой" – если время расчета станет сравнимым с промежутком между двумя сбоями в работе ЭВМ [7, с. 266-269].

В реальных приложениях число переменных может превышать 10^6 (на плане города выделяется такое количество мест-претендентов для размещения пожарных депо; легко привести аналогичные примеры для задач размещения иного рода ресурсов). В связи с этим был разработан алгоритм, использующий для своей реализации объем 1-3 *Гб* оперативной памяти ЭВМ для числа переменных, не превышающих 10^6 (алгоритм использует объем памяти порядка $C_1 \cdot n$, где $C_1 \leq 100$).

Распределение $\mu = (x_1, x_2, ..., x_n)$ можно считать вектором (точкой) в пространстве R^n. Множество всех допустимых распределений согласно условию (2.2) расположено в положительном ортанте пространства R^n. Обозначим через τ_i соответствующую координатную гиперплоскость

$$(\tau_i): x_i = 0, i \in \overline{1, n}. \tag{2.4}$$

Для каждого неравенства (2.3) обозначим через σ_i гиперплоскость

$$(\sigma_i): \sum_{j \in H_i} x_j - m_i = 0, \ i \in \overline{1, n}. \tag{2.5}$$

Определение 2. Определим функционал M – массу вектора $\mu \in R^n$ по формуле

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}(\mu) = x_1 + x_2 + ... + x_n, \tag{2.6}$$

где $\mu=(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Обозначим также через ρ гиперплоскость

$$(\rho): x_1 + x_2 + ... + x_n - \mathrm{M} = 0. \tag{2.7}$$

Используя очевидные сокращения, приведем еще раз формулировку *задачи* 2: найти вектор $\mu \in R^n$, для которого функционал $M(\mu)$ достигает наименьшего значения при наличии ограничений

$$\tau_i(\mu) > 0, \sigma_i(\mu) > 0, i \in \overline{1, n}.$$

Замечание 3. а) Область D допустимых распределений располагается в положительном ортанте пространства R^n, её границами служат гиперплоскости τ_i и σ_i, $i \in \overline{1, n}$ (быть может, не все, так как система ограничений (2.5) может оказаться несовместной); б) область D является неограниченным полиэдром, так как для допустимого распределения ($\mu \in D$ вся полупрямая $\lambda \cdot \mu$, где $\lambda \geq 1$, также принадлежит D (это следует из того, что умножение всех координат вектора μ

на положительное число λ ≥ 1 может только усилить неравенства (2.2) и (2.3)).

Определение 3. Распределение μ, назовем экстремальным, если оно принадлежит границе области D допустимых распределений, и оптимальным, если оно является решением *задачи* 2.

Лемма 3. Если распределение μ принадлежит области D и не является экстремальным, то для некоторого положительного числа $\lambda < 1$ распределение $\lambda\cdot\mu$ экстремально.

Доказательство. Если для μ выполнены неравенства (2.2), то и для $\lambda\cdot\mu$ при положительных λ они останутся верными. Если μ не экстремально, т. е. все неравенства (2.3) являются строгими

$$\sigma_i(\mu) = \sum_{j\in H_i} x_j - m_i,\ i \in \overline{1,n},$$

то искомое λ, определяется как максимальное из чисел, для которых все неравенства

$$\sigma_i(\lambda\cdot\mu) = \lambda\cdot \sum_{j\in H_i} x_j - m_i \geq 0,\ i \in \overline{1,n}$$

выполняются, причем хотя бы одно из них превращается в равенство.

3. Описание алгоритма

Для описания алгоритма решения *задачи* 2 нам понадобятся некоторые вспомогательные понятия. Напомним, что для каждой точки g_i множества $E = \{g_i\}$ задано множество H_i, состоящее из номеров j всех тех точек g_j, которые принадлежат замкнутой r_i-окрестности точки g_i. Количество элементов множества H_i обозначим через k_t.

Уклонения d_i' и h_i' точки $\mu = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ от гиперплоскостей σ_i и τ_i определяются, как известно, формулами

$$d_i' = \frac{1}{\sqrt{k_i}}(\sum_{j\in H_i} x_j - m_i) \quad \text{и} \quad h_i' = x_i.$$

Положим

$$d_i(\mu) = \{-d_i'^2, \text{если } D_i'(\mu) \leq 0, \qquad 0, \text{ если } d_i'(\mu) \geq 0;$$

$$\mathrm{h}_i(\mu) = \{-h_i'^2, \text{если } \mathrm{h}_i'(\mu) \leq 0, \qquad 0, \text{ если } \mathrm{h}_i'(\mu) \geq 0.$$

Наконец, определим функционал $F(\mu)$ по формуле

$$F(\mu) = \sum_{i=1}^{n} (d_i(\mu) + h_i(\mu)). \tag{3.1}$$

Из этого определения следует, что функционал $F(\mu)$ является гладкой функцией координат точки $\mu = (x_1, x_2, ..., x_n)$, принимает отрицательные значения вне области D допустимых распределений, а на её границе и внутри равен нулю.

Теорема 4. Функционал $F(\mu)$ является выпуклой функцией μ:

$$F(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}) \geq \frac{1}{2}\cdot F(\mu_1)+\frac{1}{2}\cdot F(\mu_2).$$

Доказательство. Достаточно установить выпуклость каждого слагаемого в формуле (3.1). Для слагаемых $d_i(\mu)$ это вытекает из справедливости неравенства

$$(\sum_{j\in H_i}\frac{x_j+y_j}{2}-m_i)^2 \leq \frac{1}{2}\cdot(\sum_{j\in H_i}x_j-m_i)^2+\frac{1}{2}\cdot(\sum_{j\in H_i}y_j-m_i)^2,$$

которое проверяется непосредственно (здесь $\mu_1 = \{x_1\}$, $\mu_2 = \{y_2\}$) в случае $d_i'(\mu_1) \leq 0$ и $d_i'(\mu_2) \leq 0$. Если $d_i'(\mu_1) \leq 0$, $d_i'(\mu_2) \geq 0$, то точки μ_1 и μ_2 лежат по обе стороны гиперплоскости σ_i. Значит, точка $(\mu_1 + \mu_2)/2$ более чем вдвое ближе к σ_1 чем μ_1, неравенство легко проверяется. Если же $d_i(\mu_1) = d_i(\mu_2) = 0$, то и $d_i((\mu_1 + \mu_2)/2) = 0$, так как все три точки μ_1, μ_2 и $(\mu_1 + \mu_2)/2$ лежат в положительном полупространстве относительно σ_i. Для слагаемых вида $h_i(\mu)$ доказательство аналогично.

Замечание 4. Доказанная теорема есть следствие более общего факта. Именно, если K есть выпуклое множество в R^n, то расстояние $d(\mu, K)$ от точки $\mu \in R^n$ до множества K (в том числе незамкнутого или неограниченного) есть вогнутая функция точки μ. Нам понадобится следующее свойство функционала F: пусть $\mu, \nu \in R^n$; тогда функция

$$F(\mu+t\cdot\nu)$$

является гладкой и выпуклой относительно параметра t. Теперь уже можно приступить к описанию алгоритма.

Алгоритм А.

*А*1. Задаем точность расчёта – набор достаточно малых чисел ε_1, ε_2, ..., а также число λ, близкое к 1 (например,. $\Lambda = 0{,}99$).

*А*2. Выбираем начальное допустимое распределение μ (например, можно положить $\mu = \{m_i\}$).

*А*3. Преобразуем μ в экстремальное распределение μ_0 (лемма 3). Более точно, если допустимое распределение $\mu = (x_1, x_2, ..., x_n)$ не экстремально, то преобразование $\mu \rightarrow \frac{1}{c(\mu)}\cdot\mu=\mu_0$ превращает его в экстремальное; здесь $c(\mu) = \min\frac{c_i(\mu)}{m_i}$, а $\{c_i\}$ – вектор локальных "накоплений", т.е. $c_i(\mu) = \sum_{j\in H_i}x_j$, $i \in \overline{1,n}$.

*А*4. Выходим из области допустимых распределений: $\mu_1 = \lambda\cdot\mu_0$.

*А*5. На гиперплоскости (ρ): $\sum_{i=1}^{n}x_i-M(\mu_1)=0$ ищем (с точностью ε_1) максимум функционала F. Точку, в которой достигается максимум, обозначим через μ_2. Если $\mu_1 = \mu_2$ (с точностью ε_2), то идти на п. *А*8.

*А*6. Если *max F* > $-\varepsilon_3$, то ищем минимум функционала $M(\mu)$ (точка μ_3) на луче $[\mu_1, \mu_1 + t\cdot(\mu_2 - \mu_1))$, $t \geq 0$, спроектированном из начала координат на границу области D. Иначе – идти на п. А8.

*А*7. Если $M(\mu_3) < M(\mu_1)$ (с точностью ε_4), то $\mu = \mu_3$ и идти на п. *А*3.

$A8$. Если $1 - \lambda < \varepsilon_5$, то алгоритм завершен. Иначе полагаем $\lambda := (1 + \lambda)/2$ и идем на п. $A4$.

В дополнительных комментариях нуждаются п.п. $A5$ и $A6$:

1) для реализации п. $A5$ находим градиент a функционала F в точке μ_1, проектируем его на гиперплоскость ρ и ищем максимум функционала F, выходя из точки μ_1 в направлении спроектированного градиента (задание числа λ близким к единице почти обеспечивает нам, что мы не "промахнемся" мимо пересечения области D с гиперплоскостью ρ; если же такое случится, то процедура повторяется – гарантией окончательного успеха служит выпуклость функционала F);

2) в п. $A6$ мы пользуемся тем, что область D выпуклая, и поэтому значения функционала M вдоль проекции прямой, принадлежащей гиперплоскости ρ, на границу D, задают вогнутую функцию параметра этой прямой.

Можно также предложить конструкцию некоторого "псевдоградиента", не требующего для своего построения функционала F. Пусть $\mu \in R^n$ – экстремальное распределение, т.е. вектор $\overline{a}$ обладает тем свойством, что некоторые из неравенств

$$\sigma_i(\mu) \geq 0,\ I \in \overline{1, n},$$

являются равенствами. Совокупность гиперплоскостей

$$T_\mu = \{\sigma_i, \tau_j \mid \sigma_i(\mu) = 0,\ \tau_j(\mu) = 0\}$$

образует конус в R^n с вершиной в точке μ. Пусть m – сумма всех единичных нормалей к гиперплоскостям из системы T_μ. Точка $\mu + m$ принадлежит пересечению множества D допустимых распределений и внутренней части этого конуса (определенной направлениями внешних нормалей соответствующих гиперплоскостей σ_i и τ_j). В таком случае выполняются неравенства

$$\sigma_i(\mu + m) > 0,\ \tau_j(\mu + m) > 0;\ \sigma_i, \tau_j \in T_\mu,. \qquad (3.2)$$

Если для проекции m_ρ вектора m на гиперплоскость ρ также выполнены все неравенства вида (3.2), то в качестве "псевдоградиента" можно взять m_ρ. Однако в общем случае это неверно.

Тем не менее имеется возможность исправления вектора m_ρ в случае, если он не направлен вовнутрь сечения D' области D гиперплоскостью ρ.

4. Повышение эффективности алгоритмов

При более детальном анализе *задачи* 2 обнаруживаются две особенности, позволяющие повышать эффективность любых числовых алгоритмов её решения. Первая из этих особенностей имеет топологический характер. Вернемся к рассмотрению основного множества $E = \{g_i\},\ i \in \overline{1, n}$.

Определение 4. Назовем замыканием а точки $a \in E$ пересечение всех её окрестностей, т.е. где

$$\overline{a} = \{\cap E_j \mid a \in E_j\}. \qquad (4.1)$$

Точка $a \in E$ называется замкнутой, если $a = \bar{a}$, и незамкнутой в противном случае.

Лемма 5. Замыкание сохраняет отношение принадлежности, т. е. если $a \in E$, $B \subset E$ – некоторое подмножество и $a \in B$, то и $\overline{a} \subset \overline{B}$.

Доказательство леммы несложно, и мы его опустим.

Рассмотрим следующий пример. Пусть задан прямоугольник, стороны которого равны 1 и 2 соответственно. Разобьем его на квадраты со стороной 0,5. Вершины этого разбиения примем за элементы множества *E*. Множество *E* состоит из 15 точек, занумерованных по строкам (рис. 1).

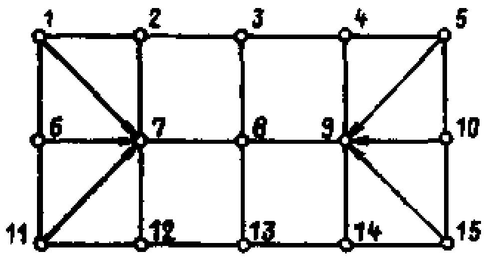

Рис. 1. Замыкания точек в конечном множестве

Принимая $r_i = 1$ для всех $i \in \overline{1,15}$, получаем набор множеств H_i (например, H_1 состоит из шести элементов – $H_1 = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$). Легко проверяется, что точки с номерами 1, 6, 5, 10, 11, 15 – незамкнутые. Именно, $\overline{\{1\}}=\{1, 7\}$, $\overline{\{6\}}=\{6, 7\}$, $\overline{\{11\}}=\{11, 7\}$ и т.д. Иначе говоря, замыкания точек с номерами 1, 6, 11 содержат общую точку с номером 7 (на рис. 1 это показано стрелками). Все остальные точки множества *E* замкнуты.

Теорема 6. Пусть заданы условия *задачи* 2 и некоторое допустимое распределение $\mu = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Пусть точка $g_i \in E$ незамкнута, $x_i \neq 0$, а точка g_j принадлежит её замыканию, т.е. $g_j \in \overline{g_i}$. В таком случае распределение

$$\mu_1 = (x_1, ..., 0, ..., x_j + x_i, ..., x_n)$$

также является допустимым (иными словами, перенося массу из незамкнутой точки в любую точку её замыкания, мы не выходим за пределы допустимых распределений).

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий допустимости распределения μ_1. По очевидным соображениям все условия (2.2) выполняются (координаты распределения μ_1 неотрицательны). Для проверки условий (2.3) заметим следующее. Если множество E_j вида (4.1) содержит точку $g_i \in E$ (такое множество E_j мы называем окрестностью точки g_i), то оно по условию содержит также и g_j. Следовательно, перенос слагаемого x_i на место с номером *j* не оказывает влияния на сумму в левой части (2.3). Заметим, что некоторые из неравенств (2.3) могут только усилиться (те, в левой части которых присутствует слагаемое x_j, но нет x_i). Теорема доказана.

Для совершенствования *алгоритма А* можно сделать следующее. Перед началом выполнения п. п. $A3$ и $A4$ нужно воспользоваться теоремой 6 и обнулить незамкнутые точки, т. е. перенести ненулевые массы в допустимом распределении из незамкнутых точек в их замыкания.

Несмотря на простоту этой идеи, при её реализации могут встретиться затруднения. Например, если E – множество вершин единичного квадрата, $r_i = \text{const} = \sqrt{2}$, то окрестность любой точки $g \in E$ содержит все E. Значит, решением *задачи* 2 для E может служить распределение, единственная ненулевая координата (с любым номером) которого равна максимальному из чисел $\{m_i\}$, $i \in \overline{1, 4}$.

Точный анализ понятия замыкания точки и его применение для модификации *алгоритма А* достаточно деликатны. Отметим, что разумное его использование приводит к ускорению сходимости *алгоритма А* (это показали вычислительные эксперименты)

Задача 2 была сформулирована при попытках нахождения решений целочисленных задач оптимального размещения ресурсов. Однако ясно, что решение *задачи* 2 не только не является единственным, как уже отмечалось, но также не обязано быть целочисленным (даже для целочисленного набора чисел $\{m_i\}$, $i \in \overline{1, n}$, используемых в ограничениях (2.3)). Тем не менее имеется одно полезное соображение.

Рассмотрим множества H_i, $i \in \overline{1, n}$, участвующие в формулировке *задачи* 2, и пусть k_0 – максимум их мощности

$$k_0 = \max k_i, \quad i \in \overline{1, n} ,$$

где k_i – мощность (число элементов) множества H_i.

Лемма 7. Пусть $\mu = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – допустимое распределение, а μ_1 – распределение, полученное из μ приравниванием нулю тех его компонент x_i, которые меньше числа $1/k_0$. Тогда для некоторого $\lambda \geq 1$ распределение $\lambda \cdot \mu$ допустимо.

Доказательство совпадает с описанием процедуры п. $A3$ *алгоритма А,* так как в сформулированных условиях все компоненты вектора накоплений $c = \{c_i\}$ строго положительны.

В формулировке леммы 7 содержится "рецепт" того, как избавляться от малых компонент допустимого распределения μ (своеобразное округление малых компонент распределения μ; аналогичная процедура округления до ненулевых целых значений пока неизвестна). Вычислительные эксперименты показывают, что это приводит к ускорению сходимости *алгоритма А,* если еще привлечь "срезание" излишне больших компонент распределения $\lambda \cdot \mu$. Все это позволяет сделать шаг в сторону получения целочисленных решений *задачи* 2, которая может и не принадлежать к числу труднорешаемых задач.

Литература

1. **Роджерс К.** Укладки и покрытия. М.: Наука, 1968. 136 с.

2. **Тот Л.Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: ИЛ, 1958. 476 с.

3. **Лойд С.** Математическая мозаика. М.: МИР, 1980. 343 с.

4. **Ширяев А.Я.** Вероятность. М.: Наука, 1980. 576 с.

5. **Карманов В.Г.** Математическое программирование, 3-е изд. М.: Наука, 1986. 288 с.

6. **Муртаф Б.** Современное линейное программирование. М.: МИР, 1984. 224 с.

7. **Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** Практическая оптимизация. М.: МИР, 1985. 509 с.