А.Б. Чернышев
(Пятигорский государственный технологический университет;
e-mail: chalbor@rambler.ru)

УСТОЙЧИВОСТЬ КАК ФАКТОР БЕЗОПАСНОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация. Проведён анализ проблем управления нелинейными системами с распределенными параметрами, влияющих на безопасность их функционирования. Предложен частотный критерий абсолютной устойчивости этих систем.

Ключевые слова: система управления, устойчивость, безопасность, нелинейная характеристика, передаточная функция.

A.B. Chernishev

STABILITY IN TERM OF SAFETY OF CONTROLLED ENGINEERING SYSTEMS

Abstract. Analyzes the problems of control for nonlinear systems with distributed parameters that are influencing safety of this systems. We propose frequency criteria of absolute stability for this systems.

Key words: control system, stability, nonlinear characteristics, transfer function.

Статья поступила в редакцию 24 сентября 2010 г.

Введение

По мере развития и усложнения техносферы анализ её безопасности становится одной из наиболее актуальных задач фундаментальных междисциплинарных исследований, прикладных научно-технических разработок, создания систем диагностики и мониторинга, построения барьеров и защит. Конечной целью таких исследований и разработок является научно-обоснованная оценка возрастающих рисков техногенных катастроф и доведение этих рисков до приемлемых уровней. Одной из групп составляющих объекты техносферы являются объекты технического регулирования и управления. Для получения надлежащего уровня точности и адекватности, эти объекты следует рассматривать как объекты с распределенными параметрами.

Основная особенность объектов с распределенными параметрами состоит в том, что они имеют пространственную протяженность, и их состояние невозможно характеризовать только изменением координат объекта во времени. Состояние таких объектов описывается функциями нескольких переменных, а их поведение, как правило – дифференциальными уравнениями в частных производных.

Среди основных проблем теории управления объектами с распределенными параметрами, влияющих на безопасность их функционирования, можно выделить ***устойчивость.*** Неустойчивые режимы работы ядерных реакторов, объектов термообработки, трубопроводов, объектов, связанных с гидролитосферными процессами, и др. неизбежно приводят к взрывам, пожарам, катастрофам.

Понятие устойчивости относится к одному из фундаментальных понятий современной науки. В общем смысле под устойчивостью можно понимать способность системы сопротивляться изменению своего состояния [2]. В настоящее время существует ряд критериев, позволяющих оценить устойчивость динамических систем, однако для систем с распределенными параметрами имеющиеся критерии применимы лишь к классу линейных систем.

Анализ абсолютной устойчивости нелинейных систем управления

Задача об исследовании абсолютной устойчивости нелинейных систем управления возникает в связи с тем, что в некоторых случаях нелинейная характеристика является нестабильной и может быть охарактеризована только определенной областью. Для нелинейных систем с сосредоточенными параметрами В.М. Поповым предложен частотный критерий определения абсолютной устойчивости, то есть устойчивости системы при любых начальных отклонениях для любой формы нелинейной характеристики, принадлежащей к некоторому определенному классу.

Класс нелинейных моделей очень широк, что чрезвычайно затрудняет их единообразное описание, возможность использования универсальных методов анализа и синтеза. Поэтому при разработке методик исследования автоматических систем управления по нелинейным моделям выбираются некоторые расчетные формы моделей, к которым, по возможности, пытаются привести исходные [3].

Достаточно широкий класс нелинейных систем управления представляют системы, структурная схема которых представляется последовательным соединением нелинейного блока и линейной части. В этом случае можно использовать аппарат передаточных функций линейной части системы.

Рассмотрим нелинейную систему с устойчивой линейной частью. Положим, что нелинейный элемент имеет однозначную статическую характеристику. Известно, что для систем с сосредоточенными параметрами статическая характеристика удовлетворяет условиям:

$$0 \le \varphi(\sigma) \le k\sigma; \quad \varphi(0) = 0,$$

где σ входное воздействие, $\varphi(\sigma)$ – нелинейная характеристика, то есть характеристика нелинейного элемента, принадлежащего сектору $[0;k]$.

Это является основным признаком рассматриваемого класса нелинейностей. Для абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной сосредоточенной системы с устойчивой линейной частью достаточно существования действительного значения q, для которого выполняется условие:

$$\forall\omega \ge 0 : \mathrm{Re}\left[(1 + j\omega q)W(j\omega)\right] > -\frac{1}{k};$$

где k – угловой коэффициент, характеризующий сектор абсолютной устойчивости, являющийся некоторым предельным параметром нелинейной характеристики $\varphi(\sigma)$, произвольно располагающейся в заданной области; ω – круговая частота; j – мнимая единица; $\mathrm{Re}[W(j\omega)]$ – действительная часть частотной характеристики,; $\mathrm{Im}[W(j\omega)]$ – мнимая часть частотной характеристики.

$$0 \le \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \le k \text{, при } \sigma \ne 0\text{; } \varphi(0) = 0.$$

Выделив действительную и мнимую часть, частотную характеристику можно представить в виде:

$$W(j\omega) = \mathrm{Re}[W(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[W(j\omega)].$$

Вводится понятие модифицированной амплитудно-фазовой характеристики линейной части (АФХ ЛЧ).

$$W^*(j\omega) = \mathrm{Re}[W^*(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[W^*(j\omega)],$$

где

$$\mathrm{Re}[W^*(j\omega)] = \mathrm{Re}[W(j\omega)],\ \mathrm{Im}[W^*(j\omega)] = \omega\,\mathrm{Im}[W(j\omega)].$$

Модифицированная АФХ отличается от обычной изменением значений мнимой части в ω раз.

В системах с распределенными параметрами входной сигнал может зависеть не только от времени, но и от пространственных координат. Пусть нелинейный элемент задается функцией $z = \varphi(\sigma)$, которая значению $\sigma(x, y, t)$ входного сигнала ставит в соответствие значение $z(x, y, t)$ выходного сигнала звена, то есть $z(x, y, t) = \varphi(\sigma(x, y, t))$. Применительно к системам с распределенными параметрами, представим угловой коэффициент k как коэффициент усиления пространственно-усилительного звена [4]:

$$K(G) = E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{1}{n_1}G\right], \qquad 0 \le G \le \infty,$$

где G – обобщенная координата; E_1 – общий коэффициент усиления; n_1 – весовой коэффициент.

Тогда уравнение прямой, ограничивающей сектор нелинейности сверху, для каждого контура можно записать в виде:

$$z_n = E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{1}{n_1}G_n\right] \cdot \sigma_n,$$

где n – номер контура; G_n – значение обобщенной координаты для n - го контура; σ_n – значение входного сигнала для n - го контура; z_n – значение выходного сигнала для n - го контура.

Уравнение поверхности, ограничивающей область нелинейности, выраженное через частные производные, может быть записано в виде:

$$z = E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1} - \frac{1}{n_1}\nabla^2\right] \cdot \sigma = E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1} - \frac{1}{n_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] \cdot \sigma(x, y, t) =$$

$$= E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1}\sigma(x, y, t) - \frac{1}{n_1}\left(\frac{\partial^2 \sigma(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma(x, y, t)}{\partial y^2}\right)\right],$$

где E_1 – коэффициент усиления.

Откуда получим, что если нелинейное входное воздействие не зависит от пространственных координат x, y, то выражение примет вид:

$$z = E_1 \frac{n_1 - 1}{n_1} \cdot \sigma(t),$$

где
$$k = E_1 \frac{n_1 - 1}{n_1}.$$

Уравнение прямой $z = k \cdot \sigma(t)$ не зависит от значения обобщенной координаты G. Значение углового коэффициента k зависит от заданного коэффициента усиления E_1 и от весового коэффициента n_1, подбор которых позволит минимизировать сектор, которому принадлежит нелинейная характеристика. Введем в систему координат ось $\psi_n^2 = \widetilde{G}$, где $\widetilde{G}(n)$ – дискретная функция с областью изменения от $\widetilde{G}_H$ до $\widetilde{G}_K$;

$$\psi_n^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2; (n = 1,2,3...);\ \widetilde{G}_H = \frac{\pi^2}{l^2};\ \widetilde{G}_K \to \infty,$$

где l – геометрический параметр объекта; $\widetilde{G}_H$ – начальное значение дискретной функции $\widetilde{G}(n)$; $\widetilde{G}_K$ конечное значение дискретной функции $\widetilde{G}(n)$.

Заменим $\widetilde{G}$ непрерывной функцией G с областью определения $[\widetilde{G}_H; \infty)$. В этом случае, при изменении G охватятся все дискретные значения функции $\widetilde{G}$ [4]. Предположим, что нелинейная характеристика объекта не зависит от функции $\widetilde{G} = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, то есть от параметра n. Другими словами, вид и форма нелинейной характеристики остаются неизменными для каждой составляющей разложения передаточной функции в ряд Фурье. Тогда для каждого значения n получим прямую в системе координат $OXY\widetilde{G}$. Угловой коэффициент q для всех прямых не зависит от значения $\widetilde{G}$. Длина отрезка $\frac{1}{k}$, отсекаемого каждой из прямых по оси OX, так же не зависит от значения $\widetilde{G}$. Следовательно, все прямые параллельны между собой и находятся на одинаковом расстоянии от оси G, то есть, образуют плоскость в системе координат $OXYG$. В [4] показано, что пространственно-инвариантную систему управления можно представить как совокупность независимых контуров управления по каждой пространственной моде входного воздействия.

Если каждый контур асимптотически устойчив, то и система управления в целом устойчива. В каждой плоскости, параллельной плоскости OXY для каждого значения n ($n = \overline{1, \infty}$), вектор $W(j\omega)$ опишет годограф при изменении значения ω от 0 до ∞. Для графической иллюстрации анализа устойчивости по критерию Попова, необходимо построить модифицированный пространственный годограф, отличающийся изменением значений мнимой части в ω раз. При сделанных допущениях, критерий Попова для систем с распределенными параметрами может быть интерпретирован следующим образом [5]:

для абсолютной устойчивости нелинейной распределенной системы, при условии, что нелинейная характеристика не зависит от пространственных координат, достаточно, чтобы модифицированный пространственный годограф разомкнутой системы лежал справа от плоскости, проходящей через линию $L:\left\{\omega\,\mathrm{Im}(W)=0;\mathrm{Re}(W)=-\frac{1}{k};G\right\}$, под углом $\alpha=arctg\frac{1}{q}$ к плоскости $\{\mathrm{Re}(W);G\}$.

В этом случае частотная характеристика каждого контура системы управления будет лежать правее прямой $\mathrm{Re}(W)-q\omega\,\mathrm{Im}(W)+\frac{1}{k}=0$. Следовательно, каждый контур системы управления будет устойчив, а значит, будет устойчива и вся система. Однако, параметр k – угол абсолютной устойчивости, ограничивающий сектор нелинейной характеристики, может зависеть от значения обобщенной координаты G. Если входное воздействие задано в виде изображения по Лапласу $\sigma(x,y,s)$, то поверхность, ограничивающая сектор $[0;k]$ сверху, будет иметь вид:

$$z=E_1\left[\frac{n_1-1}{n_1}+\frac{1}{n_1}G\right]\cdot\sigma(x,y,s),$$

где s – оператор Лапласа, $k=E_1\left[\frac{n_1-1}{n_1}+\frac{1}{n_1}G\right]$.

Выражения углового коэффициента k при различных значениях весового коэффициента n_1 приведены в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость углового коэффициента от весового коэффициента

Весовой коэффициент n_1	Угловой коэффициент k
1	$k=G$
2	$k=0{,}5+0{,}5\cdot G$
5	$k=0{,}8+0{,}2\cdot G$
10	$k=0{,}9+0{,}1\cdot G$
∞	1

Если $E_1\neq 1$, например $E_1=10$, тогда, например при $n_1=5$ будет $k=8+2\cdot G$. Увеличение коэффициента E_1 увеличивает параметры $\tilde{b}$ и $\tilde{k}$ прямой $k=\tilde{b}+\tilde{k}\cdot G$ в E_1 раз, то есть прямая $k=\tilde{b}+\tilde{k}\cdot G$ будет сдвигаться вверх и увеличивать свой угловой коэффициент. Для систем с распределенными параметрами, поверхность, ограничивающая область нелинейности сверху, будет иметь вид, изображенный на рис. 1. При возрастании весового коэффициента n_1 гиперболическая поверхность выпрямляется, при $n_1=\infty$ представляет собой плоскость. При увеличении общего коэффициента усиления E_1 произойдет увеличение углового коэффициента k для каждого из значений G.

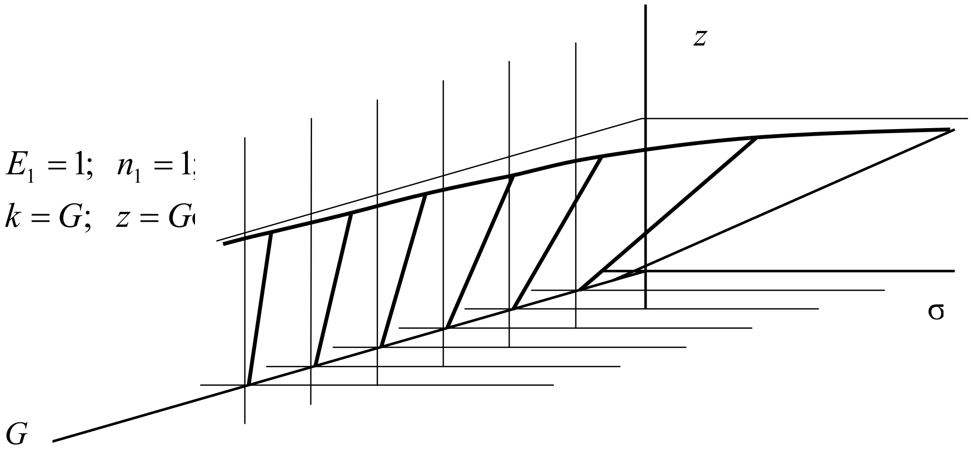

Рис. 1. Поверхность, ограничивающая область нелинейной характеристики

Таким образом, может быть сформулирован модифицированный критерий абсолютной устойчивости нелинейных распределенных систем управления:

Пусть выполняются условия:

1) Все полюсы передаточной функции линейной части системы имеют отрицательные действительные части (т.е. линейная часть разомкнутой системы устойчива).

2) Характеристика нелинейного элемента $z = \varphi(\sigma(x, y, t))$ должна принадлежать области, ограниченной плоскостью $z = 0$ и поверхностью

$$z = E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1}\sigma(x, y, t) - \frac{1}{n_1}\left(\frac{\partial^2\sigma(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma(x, y, t)}{\partial y^2}\right)\right],$$

то есть

$$\varphi(0) = 0,\ 0 \le \frac{\varphi(\sigma(x, y, t))}{\sigma(x, y, t)} \le E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1} - \frac{1}{n_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right],$$

при всех $\sigma(x, y, t) \ne 0$.

Если входное воздействие задано в виде изображения по Лапласу $\sigma(x, y, s)$, то поверхность, ограничивающая область сверху, будет иметь вид:

$$z = E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{1}{n_1}G\right] \cdot \sigma(x, y, s),$$

$$\varphi(0) = 0,\ 0 \le \frac{\varphi(\sigma(x, y, s))}{\sigma(x, y, s)} \le E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{1}{n_1}G\right],$$

при всех $\sigma(x, y, s) \ne 0$, где

$$G = \left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2 = \frac{n^2\pi^2\left(l_y^2 + l_x^2\right)}{l_x^2 l_y^2}.$$

3) Существует действительное число q такое, что при всех $\omega \in [0;\infty)$ выполняется неравенство:

$$\mathrm{Re}\left[(1+j\omega q)W(j\omega)\right] > -\frac{1}{E_1\left[\frac{n_1-1}{n_1}+\frac{1}{n_1}G\right]}.$$

Тогда при любых ограниченных начальных отклонениях от нулевого значения функция $\sigma(x,y,t)$ остается ограниченной при $t>0$ и $\sigma(x,y,t)\to 0$, при $t\to\infty$, то есть система будет асимптотически устойчивой, так как из ограниченности $\sigma(x,y,t)$ следует ограниченность функции $Q(x,y,t)$, а из стремления $\sigma(x,y,t)$ к нулю следует, что $Q(x,y,t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Можно дать следующую графическую интерпретацию модифицированного критерия Попова (рис. 2).

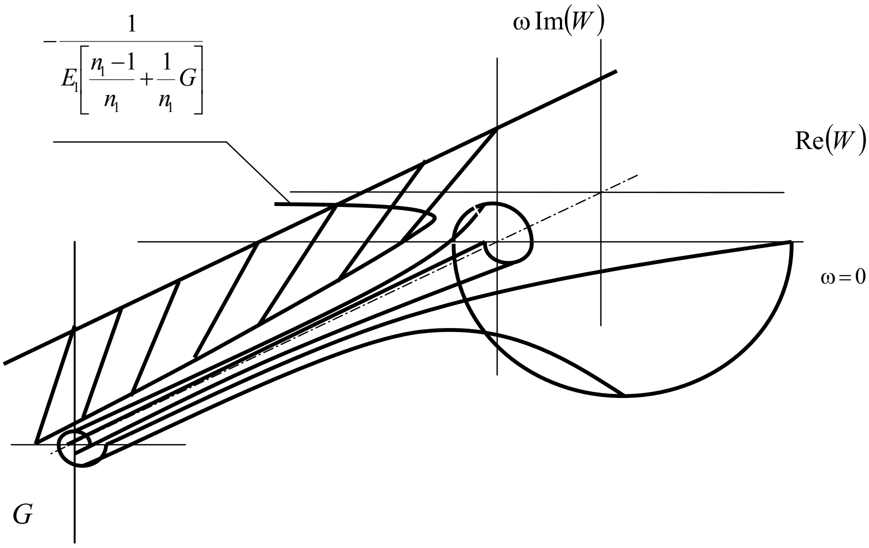

Рис. 2. Графическая интерпретация критерия абсолютной устойчивости

Если передаточная функция разомкнутой системы не имеет полюсов, лежащих в правой полуплоскости, тогда для абсолютной устойчивости замкнутой системы достаточно, чтобы модифицированный пространственный годограф не пересекал поверхность, проходящую через линию $\left\{\mathrm{Re}(W) = -\frac{1}{E_1\left[\frac{n_1-1}{n_1}+\frac{1}{n_1}G\right]};\mathrm{Im}(W)=0\right\}$ и прямую $\{\mathrm{Re}(W)=0;\mathrm{Im}(W)=q;G\}$.

Заключение

Устойчивое функционирование управляемых технических систем обеспечивается на стадии их теоретической разработки и проектирования. Наибольшую опасность в настоящее время в техногенной сфере представляют транспортные аварии, взрывы и пожары, радиационные аварии, аварии с выбросом химически и биологически опасных веществ, гидродинамические аварии, аварии на коммунально-энергетических системах. Значительный класс объектов и систем, эксплуатация которых может привести к подобным катастрофам, составляют системам с распределенными параметрами. Предложенный модифицированный критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем с распределенными параметрами поможет расширить возможности анализа и синтеза систем управления, устойчивое функционирование которых позволяет повысить техногенную безопасность объектов техносферы.

Литература

1. **Акимов В.А., Лесных В.В., Радаев Н.Н.** Основы анализа и управления риском в природной и техногенной сферах. М.: Деловой экспресс, 2004. 352 с.
2. **Колесников А.А.** Проблемы теории аналитического конструирования нелинейных регуляторов и синергетический подход. М.: Физматлит, 2004.
3. **Рапопорт Э.Я.** Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2003. 299 с.
4. **Першин И.М.** Анализ и синтез систем с распределенными параметрами. Пятигорск: РИА-КМВ, 2007. 244 с.
5. **Чернышев А.Б.** Интерпретация критерия абсолютной устойчивости для нелинейных распределенных систем // Автоматизация и современные технологии. № 2. 2010. С 28-32.