А.В. Нестеров
(Российский государственный социальный университет;
e-mail: andrenesterov@yandex.ru)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ТЯЖЕЛОЙ ПРИМЕСИ В СИСТЕМЕ "АТМОСФЕРА – ПОЧВА – ПОВЕРХНОСТЬ"

Аннотация. На основе традиционной конвективно-диффузионной модели строятся упрощенные формулы, описывающие распространение тяжелой примеси в системе "атмосфера – почва – поверхность" с учётом ветрового подхвата. Полученные формулы пригодны для прогнозирования распространения в нижних слоях атмосферы дыма от пожаров.

Ключевые слова: конвективно-диффузионный перенос, ветровой подхват, сингулярные возмущения, асимптотическое разложение по малому параметру.

Nesterov A.V.

MATHEMATICAL MODEL OF PROPAGATION OF A HEAVY IMPURITY IN THE SYSTEM "ATMOSPHERE – SOIL – SURFACE"

Abstract. On the basis of the traditional convection-diffusion model constructed simplified formulas describing the propagation of a heavy impurity in the system "atmosphere – soil – surface" with a light wind pickup. The formulas obtained are suitable for predicting the spread in the lower atmosphere of smoke from fires.

Key words: convection-diffusion transport, wind-grab, singular perturbation, asymptotic expansion in small parameter.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 30 сентября 2010 г.

Введение

Исследование миграции загрязняющих примесей в системе атмосфера – почва чрезвычайно актуально. Разнообразным аспектам этого вопроса посвящена многочисленная литература ([1-10], хороший обзор литературы, посвященной этому вопросу, имеется в [2]). В работах [9, 10] рассматривались математические модели переноса примеси в атмосфере при наличии ветрового подхвата с подстилающей поверхности, но без учёта распространения примеси вглубь почвы.

В настоящей статье приведено описание математической модели миграции примеси в системе атмосфера-почва с учётом ветрового подхвата с подстилающей поверхности и диффузии вглубь почвы. Эта модель является развитием модели, рассмотренной в работах [9, 10]. Основной целью автора было получение простых асимптотических формул для описания переноса примесей.

Постановка задачи

Будем считать, что примесь может находиться в воздухе (например, на аэрозолях), в глубине и на поверхности почвы.

Будем рассматривать только миграцию примеси в пространстве, не учитывая возможные физико-химические трансформации.

Перемещение примеси в почве и атмосфере будем описывать в рамках традиционного конвективно-диффузионного подхода с учётом того, что примесь может находиться на поверхности почвы, откуда может подхватываться ветром и уноситься в атмосферу, а также диффундировать вглубь почвы. Направив декартовы координаты x, y горизонтально, а z – вертикально ($z = 0$ соответствует поверхности почвы), запишем уравнение, описывающие перемещение примеси в атмосфере $(z > 0)$ под действием турбулентной диффузии, направленного переноса и силы тяжести:

$$\frac{\partial c_a}{\partial t} + \nabla(\overline{V} c_a) - w\frac{\partial c_a}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(K_{az}\frac{\partial c_a}{\partial z}) + \nabla(K\nabla c_a), \quad (1)$$

где c_a - концентрация примеси в атмосфере;

∇ – оператор градиента по переменным x, y;

$\overline{V}$ – горизонтальная компонента скорости ветра;

w – скорость оседания примеси;

K, K_z – коэффициенты турбулентной диффузии по горизонтали и вертикали соответственно.

При описании миграции примеси в почве $(z < 0)$ учтем перемещение только по вертикали, которое опишем с помощью уравнения диффузионно-конвективного переноса:

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(K_{sz}\frac{\partial c_s}{\partial z} - w_s c_s), \quad (2)$$

где c_s – концентрация примеси в почве;

w_s – скорость просачивания примеси вглубь почвы;

K_{sz} – коэффициент псевдодиффузии в почве вертикали.

В соответствии с принятой моделью примесь может находиться и на поверхности $(z = 0)$. Обозначив поверхностную концентрацию примеси через c_r, запишем уравнение баланса примеси на поверхности почвы:

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} = J^+ - J^-, \quad (3)$$

где J^+ и J^- – потоки примеси на поверхность почвы из атмосферы и с поверхности вглубь почвы – равны:

$$J^+ = -(K_{az}\frac{\partial c_a}{\partial z} + w_a c_a)\,|_{z=0}, J^- = (K_{sz}\frac{\partial c_s}{\partial z} + w_s c_s)\,|_{z=0}\,. \quad (4)$$

Для замыкания системы уравнений (1-3) необходимо выразить потоки (4) J^+, J^- через концентрации примеси у поверхности. Так же, как и в работе [9], будем считать, что поток примеси из атмосферы на поверхность есть сумма двух слагаемых

$$J^+ = -\alpha c_r + v_g c_a\,|_{z=0}\,. \quad (5)$$

Первое слагаемое описывает ветровой подхват примеси с поверхности (α – коэффициент ветрового подхвата), второе – сухое осаждение на поверхность из атмосферы (v_g – скорость сухого осаждения). Конвективно-диффузионный поток примеси вглубь почвы с поверхности пропорционален концентрации примеси на поверхности

$$J^{-} = \beta c_r \tag{6}$$

где β – коэффициент просачивания.

В данной статье коэффициенты α, v_g, β вводятся эмпирически, подробнее об этих величинах можно узнать, например, в работах [5-7]. Совокупность уравнений (1-3) и краевых условий (5-6) в сочетании с уравнениями (4) для потоков примеси является замкнутой системой. Отметим, что при отсутствии подхвата эта система переходит в хорошо известное уравнение турбулентной диффузии в атмосфере с краевым условием Монина [4]. В общем случае решение системы уравнений (1-3) с краевыми условиями (4-6) представляет большие сложности как в математическом отношении, так и в отношении обеспеченности данными.

Однако про определенных условиях в этой системе можно выделить малый параметр, наличие которого заметно упрощает решение задачи. Рассмотрим задачу в тех же предположениях, что и в работе [9], то есть для случая, когда характерное время перемешивания по вертикали в атмосфере намного меньше характерного времени T_a перемещения по горизонтали. Характерное время T_a перемещения по горизонтали можно грубо оценить как L/V_0, где L – характерный масштаб области переноса по горизонтали, V_0 – характерная скорость переноса по горизонтали. Масштабом скорости перемещения по вертикали является так называемая скорость трения U_*. Характерное время перемещения по вертикали равно h/U_*, где h – характерная толщина атмосферы, в которой сосредоточена основная масса примеси (которую можно грубо оценить как K_z/w).

Будем считать, что время установления равновесия между концентрацией примеси на поверхности и в приземном слое атмосферы также намного меньше времени T_a. Характерное время установления равновесия можно оценить как h/v_g.

Поскольку коэффициент псевдодиффузии и скорость переноса в почве на несколько порядков меньше, чем коэффициент турбулентной диффузии и скорость переноса в атмосфере, то характерное время переноса в атмосфере T_a намного меньше, чем характерное время миграции примеси в почве T_s. Все эти предположения можно записать в виде неравенства

$$h/U_*, h/v_g << T_a << T_s. \tag{7}$$

Как показано в работе [9], это справедливо для примесей, имеющих скорость оседания w_a 1 *см/с* и выше (то есть достаточно тяжелых), перемещающихся под действием ветра со скоростью порядка нескольких метров в секунду на расстояния порядка сотен километров и более.

В силу неравенств (7) величина $\varepsilon = h / TU_*$ есть малый параметр, то есть $0 < \varepsilon << 1$.

Перейдем, как и в [9], к переменным

$$t = t_1 T_0, x = x_1 L_0, y = y_0 L_0, z = z_1 h, c_r = c_{r_1} h,$$

где L_0 – характерный масштаб переноса примеси по горизонтали (сотни *км*);

T_0 – характерное время переноса примеси по горизонтали (порядка 10^5 *с*);

$h = K_z w^{-1}$ – характерный масштаб по вертикали.

Учтём, что коэффициент диффузии и скорость конвективного переноса в почве намного меньше, чем те же величины для атмосферы, поэтому можно записать:

$$K_{zs} = \varepsilon K_{1zs}, w_s = \varepsilon w_{1s},$$

где величины K_{1zs}, w_{1a} того же порядка, что и K_{za}, w_a, а $0 < \varepsilon << 1$ – малый положительный параметр.

Опуская для краткости записи индекс 1 у новых переменных, запишем систему (1-6) в безразмерном виде:

$$\varepsilon(\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(\overline{V} p) - \nabla(K \nabla p)) = \frac{\partial}{\partial z}(K_{az} \frac{\partial p}{\partial z}) + w_a \frac{\partial p}{\partial z}, z > 0, \tag{8}$$

$$\varepsilon \frac{\partial r}{\partial t} = -(\alpha + \varepsilon \beta) r + \gamma p |_{z=0}, z = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}(K_{sz} \frac{\partial q}{\partial z} - w_s q), z < 0, \tag{10}$$

$$(K_{az} \frac{\partial p}{\partial z} + w_a p) |_{z=0} = -\alpha r + \gamma p |_{z=0}, \tag{11}$$

$$(K_{sz} \frac{\partial q}{\partial z} + w_s q) |_{z=0} = \beta r. \tag{12}$$

где $p(x, y, z, t), q(x, y, z, t), r(x, y, t)$ – безразмерные концентрации примеси в атмосфере, почве и на поверхности соответственно, коэффициенты системы (8-12) безразмерны (0÷1).

Систему (8-12) необходимо дополнить начальными условиями:

$$p(x, y, z, 0) = p^0(x, y, z), q(x, y, z, 0) = q^0(x, y, z), \tag{13}$$

$$r(x, y, 0) = r^0(x, y,) \tag{14}$$

и краевыми условиями на бесконечности

$$p \xrightarrow[z \to \infty]{} 0 \;, q \xrightarrow[z \to -\infty]{} 0 . \tag{15}$$

В настоящей статье ограничимся формальным построением асимптотик без строгого обоснования, поскольку основной целью автора является получение простых формул для оценок переноса примеси.

Для построения асимптотики решения задачи (8)-(13) потребуем выполнения условий:

1. $K(x, y, z, t), K_z(x, y, z, t), K_a(x, y, z, t) \geq K_0 > 0$, $w_a, w_s \geq w_0 > 0$, $\gamma(x, y, t) \geq \gamma_0 > 0$, $\alpha(x, y, t) > \alpha_0 > 0$.
2. Функции $K, K_{za}, K_{zs}, V, w_s, \gamma, \alpha, \beta, p^0, r^0, q^0$ – достаточно гладкие, p^0, q^0 – финитные по x, y, z (r^0 – по x, y).

Построение асимптотики

Асимптотика решения системы (8)-(13) будет построена в виде суммы регулярного ряда и различных погранфункций.

Построение асимптотик производится по стандартному алгоритму [11].

1) Регулярные части асимптотического разложения строятся в виде рядов по степеням ε:

$$\overline{p} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{p}_i, \overline{r} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{r}_i, \overline{q} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{q}_i$$

Ограничимся построением только главных слагаемых порядка ε^0, как наиболее важных для практических расчётов. Для этого подставим эти ряды в (8)-(13) и приравняем коэффициенты с одинаковыми степенями ε. Слагаемые порядка ε^0 дают соотношения

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{za}\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial z} + w_a \overline{p}_0\right) = 0, \tag{16}$$

$$\gamma \overline{p}_0 |_{z=0} - \alpha \overline{r}_0 = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z} + w_s \overline{q}_0\right), \tag{18}$$

$$\left(K_{za}\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial z} + w_a \overline{p}_0\right)_{z=0} = -\alpha_s \overline{r}_0 + \gamma \overline{p}_0 |_{z=0}, \tag{19}$$

$$\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z} + w_s \overline{q}_0\right)_{z=0} = \beta \overline{r}_0. \tag{20}$$

Учитывая (15), из (16) получаем:

$$K_{za}\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial z} + w_a \overline{p}_0 = 0.$$

Значит $\overline{p}_0 = \phi(x,y,z,t)\psi_0(x,y,t)$, где $\phi(x,y,z,t) = \exp(-w_a \int_0^z \frac{dz}{K_{za}})$, $\psi_0(x,y,t)$ – неопределенная пока функция.

Из (17) получаем, что

$$\overline{r}_0 = \frac{\gamma}{\alpha}\psi_0(x,y,t).$$

Функция $\overline{q}_0$ есть решение задачи

$$\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z} + w_s \overline{q}_0\right), \tag{21}$$

$$\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z} + w_s \overline{q}_0\right)_{z=0} = \frac{\beta\gamma}{\alpha}\psi_0(x,y,t). \tag{22}$$

$$\overline{q}_0 |_{t=0} = q_0(x,y,z). \tag{23}$$

Для определения ψ_0 запишем члены порядка ε:

$$\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial t}+\nabla(V\overline{p}_0)-\nabla(K\nabla\overline{p}_0)=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{za}\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial z}+w_a\overline{p}_1\right), z>0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \overline{r}_0}{\partial t}=\gamma\,\overline{p}_1|_{z=0}-\alpha\overline{r}_1-\beta\overline{r}_0, z=0, \tag{25}$$

$$\left(K_{za}\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial z}+w_a\overline{p}_1\right)_{z=0}=-\alpha_s\overline{r}_1+\gamma\,\overline{p}_1|_{z=0}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \overline{q}_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_1}{\partial z}+w_s\overline{q}_1\right), z<0, \tag{27}$$

$$\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_1}{\partial z}+w_s\overline{q}_1\right)_{z=0}=\beta\overline{r}_1. \tag{28}$$

Из (25) следует:

$$\overline{r}_1=\frac{1}{\alpha}(\gamma\,\overline{p}_1-\beta\overline{r}_0-\frac{\partial \overline{r}_0}{\partial t}).$$

Интегрируя (24) по z от 0 до ∞, получаем:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial t}+\nabla(V\overline{p}_0)-\nabla(K\nabla\overline{p}_0)\right)dz=$$

$$=K_{za}\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial z}+w_a\overline{p}_1|_{z=0}^{z=\infty}=-\left(\frac{\beta\gamma\,\overline{p}_0}{\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\gamma\,\overline{p}_0}{\alpha}\right).$$

Подставляя $\overline{p}_0=\phi\psi_0$ и учтя, что $\phi(x,y,t,0)=1$, после несложных выкладок получаем уравнение для определения ψ_0:

$$L\psi_0\equiv\frac{\partial}{\partial t}(h\psi_0)+\nabla(V^*\psi_0)-\nabla(K^*\nabla\psi_0)+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\psi_0=0, \tag{29}$$

где $$h(x,y,t)=\frac{\gamma}{\alpha}+\int_0^{\infty}\phi(x,y,z,t)dz\,,\; V^*(x,y,t)=\int_0^{\infty}\left(V\phi-K\nabla\phi\right)dz\,,$$

$$K^*(x,y,t)=\int_0^{\infty}K(x,y,z,t)\phi(x,y,z,t)dz$$

Начальные условия для уравнения (27) будут поставлены в п. 2. Для того, чтобы $\overline{p}_0,\overline{r}_0$ определялись однозначно, необходимо поставить начальные условия для уравнения ψ_0. Для этого необходимо рассмотреть соответствующие пограничные функции.

2) Так как $\overline{p}$ и $\overline{r}$, связанные алгебраическими соотношениями, ни в каком приближении не могут сразу удовлетворить двум начальным условиям при $t=0$, то в окрестности $t=0$ возникает пограничный слой. Для его описания введем растянутую переменную $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$ и будем строить пограничные функции в виде рядов:

$$\Pi_p(x,y,z,\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Pi_{pi}(x,y,z,\tau)\,,$$

$$\Pi_r(x,y,\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Pi_{ri}(x,y,\tau),$$

$$\Pi_q(x,y,z,\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Pi_{qi}(x,y,z,\tau).$$

Потребуем, чтобы пограничные функции формально удовлетворяли уравнениям и совместно с регулярными рядами – начальным и граничным (если последнее возможно) условиям. Подставляя эти ряды в (8)-(15), разлагая коэффициенты по степеням ε и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получаем уравнения для Π_{pi}, Π_{ri}, Π_{qi}.

Как и выше, ограничимся построением только главных слагаемых порядка ε^0. Они определяются из уравнений

$$\frac{\partial\Pi_{p0}}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{za}\frac{\partial\Pi_{p0}}{\partial z}+w_a\Pi_{p0}\right),\ z>0,\ \tau>0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial\Pi_{r0}}{\partial\tau}=\gamma\Pi_{p0}\,|_{z=0}-\alpha_s\Pi_{r0},\ \Pi_{p0}\xrightarrow[z\to\infty]{}0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial\Pi_{q0}}{\partial\tau}=0,\ \Pi_{q0}\xrightarrow[z\to-\infty]{}0,\ z<0,\ \tau>0, \tag{32}$$

$$\left(K_{za}\frac{\partial\Pi_{p0}}{\partial z}+w_a\Pi_{p0}\right)_{z=0}=-\alpha_s\mathit{\Pi}_{r0}+\gamma\Pi_{p0}\,|_{z=0}, \tag{33}$$

где $K_{za}=K_{za}(x,y,z,0)$, $\gamma=\gamma(x,y,0)$, $\alpha_s=\alpha_s(x,y,0)$.

Из (32), приняв во внимание то, что $\Pi_{qi0}\,|_{t=0}=0$, получаем $\Pi_{q0}=0$.

Проинтегрировав (30) по z от 0 до ∞ с учётом (31), (33) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_0^{\infty}\Pi_{p0}dz+\Pi_{r0}\right)=0.$$

Так как

$$\Pi_{p0},\Pi_{r0}\xrightarrow[\tau\to\infty]{}0$$

то получаем

$$\int_0^{\infty}\Pi_{p0}dz+\Pi_{r0}=0.$$

Требуя, чтобы Π_{p0} и Π_{r0} совместно с $\overline{p}_0$ и $\overline{r}_0$ удовлетворили начальному условию, получаем:

$$(\overline{p}_0+\Pi_{p0})\,|_{t=0}=p^0\ ,\ (\overline{r}_0+\Pi_{r0})\,|_{t=0}=r^0,$$

откуда следуют начальные условия для ψ_0, Π_{p0}, Π_{r0}:

$$\psi_0(x,y,0)=\frac{\int_0^{\infty}p^0dz+r^0}{h(x,y,0)},$$

$$\Pi_{p0}(x,y,z,0)=\overline{p}^0(x,y,z)-\phi(x,y,z,0)\psi_0(x,y,0),$$

$$\Pi_{r0}(x,y,0)=-\int_0^{\infty}\Pi_{p0}(x,y,z,0)dz.$$

3) Отметим, что построенная функция Π_r вносит невязку в краевое условие (12) при $z=0$. Для ликвидации этой невязки в окрестности точки $z=0, t=0$ строится дополнительная погранфункция S_r. Определим новую растянутую переменную $\eta=\frac{z}{\sqrt{\varepsilon}}$ и будем строить погранфункцию S_r в виде:

$$S_r(x,y,\eta,\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{i}{2}}S_{ri}(x,y,\eta,\tau)\,.$$

Потребуем, чтобы погранфункция S_r формально удовлетворяла уравнению (10) и совместно с функцией Π_r – однородному краевому условию (12). Ограничимся построением только главного слагаемого порядка ε^0. Переходя в (10),(12) к новым переменным, стандартным образом получаем уравнения для определения S_{r0}:

$$\frac{\partial S_0}{\partial\tau}=K_{zs}\frac{\partial^2 S_0}{\partial\eta^2}\,, \tag{34}$$

$$K_{zs}\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}=\beta\Pi_{r1}(x,y,\tau)\,, \tag{35}$$

$$S_0\big|_{\tau=0}=0\,, \tag{36}$$

где $K_{zs}=K_{zs}\,(x, y, 0, 0)$; $\beta=\beta\,(x, y, 0)$.

На этом алгоритм построения закончен.

Анализ результатов

Выпишем формулы для главных членов асимптотики, наиболее важные для практических расчётов.

Пограничные функции, описывающие быстрые процессы установления равновесия, для практических расчётов, как правило, не очень существенны.

Наибольший интерес для практики представляют первые члены регулярного ряда.

Концентрации примеси в атмосфере, в глубине почвы и на её поверхности ($p(x,y,z,t), q(x,y,z,t), r(x,y,t)$ соответственно) могут быть приближенно вычислены как главные члены регулярного ряда, что даёт

$$p(x,y,z,t)\approx p_0(x,y,z,t), q(x,y,z,t)\approx q_0(x,y,z,t),$$
$$r(x,y,t)\approx r_0(x,y,t),$$

где $p_0(x,y,z,t), q_0(x,y,z,t), r_0(x,y,t)$ вычисляются по следующим формулам:

$$\overline{p}_0=\phi(x,y,z,t)\psi_0(x,y,t)\,,\ \text{где}\ \phi=\exp(-w_a\int_0^z\tfrac{dz}{K_{za}})\,,$$

$$\overline{r}_0=\frac{\gamma}{\alpha}\psi_0(x,y,t).$$

Функция ψ_0 определена как решение уравнения

$$L\psi_0\equiv\frac{\partial}{\partial t}(h\psi_0)+\nabla(V^*\psi_0)-\nabla(K^*\nabla\psi_0)+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\psi_0=0,$$

где $$h(x,y,t)=\frac{\gamma}{\alpha}+\int\limits_0^\infty \phi dz\,,\; V^*(x,y,t)=\int\limits_0^\infty \left(V\phi - K\nabla\phi\right)dz\,,$$

$$K^*(x,y,t)=\int\limits_0^\infty K\phi dz,$$

с начальными условиями

$$\psi_0(x,y,0)=\frac{\int\limits_0^\infty p^0 dz + r^0}{h(x,y,0)}.$$

Функция $\overline{q}_0$ есть решение задачи

$$\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z}+w_s\overline{q}_0\right),$$

$$\left(K_{zs}\frac{\partial \overline{q}_0}{\partial z}+w_s\overline{q}_0\right)_{z=0}=\frac{\beta\gamma}{\alpha}\psi_0(x,y,t),$$

$$\overline{q}_0\big|_{t=0}=q_0(x,y,z).$$

Перенос примеси в атмосфере описывается произведением двух функций, ϕ_0 и ψ_0, описывающих распределение по высоте и перенос по горизонтали, которые рассчитываются независимо. Функция ϕ_0 описывается явной формулой, для функции i_0 получена начальная задача с эффективными коэффициентами переноса, которая проще исходной (две пространственных переменных).

Эффективные коэффициенты горизонтального переноса (скорость переноса и коэффициент турбулентной диффузии) являются осредненными по высоте с соответствующими весами коэффициентами переноса в атмосфере. Вес усреднения определяется распределением примеси по вертикали.

Концентрация примеси на поверхности пропорциональна функции ψ_0, описывающей горизонтальный перенос.

Для уравнения, описывающего перенос примеси в почве, получено простое краевое условие.

Полученные формулы являются следствием заложенных в модель физических предположений о разных временных масштабах переноса примеси в атмосфере и почве.

Полученные асимптотические формулы позволяют рассчитывать как краткосрочную, так и долгосрочную миграцию примесей в системе почва – атмосфера.

В качестве коэффициентов диффузии и средней скорости переноса примеси в атмосфере в последнем случае необходимо брать среднеклиматические величины коэффициентов диффузии и скорости переноса или их оценки по розе ветров (матожидание и дисперсию скорости ветра).

Литература

1. **Баренблатт Г.И., Голицын Г.С.** Локальная структура развитых пылевых бурь. М.: Изд-во МГУ, 1973.

2. **Бызова Н.Л.** Рассеяние примеси в пограничном слое атмосферы. М.: Гидрометеоиздат, 1974, 191 с.

3. **Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.Н.** Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчёты рассеяния примеси. Л.: Гидрометеоиздат, 1991, 275 с.

4. **Монин А.С.** О граничном условии на поверхности земли для диффундирующей примеси // Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха. М.: ИЛ, 1962.

5. Трансурановые элементы в окружающей среде / Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1985.

6. **Schemel G.** Deposition and resuspension // Athmospheric science and power production, J. Randerson (ed.), 1984.

7. **Soo S.L., Chen F.F.** The boundary condition of the diffusion equation. Powder Technol., 1982, vol. 31.

8. **Slinn W.** Formulation and solution of the diffusion-deposition-resuspension problem. Atmos. Environ. 1967, vol.10, № 3.

9. **Возженников О.И., Нестеров А.В.** О переносе примеси в атмосфере при ветровом подхвате с подстилающей поверхности // Метеорология и гидрология, 1988.

10. **Возженников О.И., Нестеров А.В.** О граничном условии для уравнения турбулентной диффузии при пылящей подстилающей поверхности // Метеорология и гидрология, 1991.

11. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978. 262 с.