

С.С. Кукушкин¹, В.В. Князев², Н.Н. Шемигон³

(¹Военная академия РВСН имени Петра Великого,
²Московский авиационный институт, ³СНПО "Элерон";
e-mail: knzv@post.ru)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРЕМЫ ОБ ОСТАТКАХ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕЛЕИЗМЕРЕНИЙ

Статья посвящена обоснованию возможности применения нетрадиционной теории конечных полей для решения некорректных задач обработки телеметрической информации со сложных технических комплексов в экстремальных условиях.

Ключевые слова: обработка результатов телеизмерений, решение некорректной задачи, нетрадиционная теория конечных полей, конструктивная теорема об остатках.

S.S. Kukushkin, V.V. Knyazev, N.N. Shemigon

MATHEMATICAL AND METHODICAL BASES USES OF THE CONSTRUCTIVE THEOREM OF THE REMAINDERS AT PROCESSING OF RESULTS OF REMOTE MEASUREMENTS

Article is devoted a substantiation of possibility of application of nonconventional theory of final fields for the decision of incorrect problems of processing of the remote measurements information from difficult technical complexes in extreme conditions.

Key words: processing of results of remote measurements, the decision of incorrect problems, the nonconventional theory of final fields, the constructive theorem of the remainders.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 27 июня 2011 г.

Введение

Одним из направлений научно-технического прогресса является интенсивное внедрение и использование в различных областях человеческой деятельности сложных **автоматизированных информационно-управляющих систем (АИУС)**. От качества (достоверности, сохранности, конфиденциальности и т.д.) измерительной информации и качества её обработки в АИУС непосредственно зависит качество выработки на её основе управленческих решений и эффективность функционирования целенаправленно действующей системы в целом.

Особенно строгие требования к качеству измерительной информации и методам и срокам её обработки предъявляются при испытаниях и эксплуатации в экстремальных условиях **сложных технических комплексов (СТК)**, таких как авиационные и ракетно-космические комплексы, технические комплексы, функционирующие в условиях воздействия агрессивных сред, при чрезвычайных ситуациях и т.п.

Особенностями этих технологических процессов и соответствующих процессов измерения и обработки информации являются:

- быстротечность происходящих процессов и, соответственно, быстрое изменение значений измеряемых величин, большие объёмы обрабатываемой в крайне ограниченные временные интервалы (в частности, в реальном масштабе времени) измерительной информации и оперативное принятие управленческих решений;

- необратимость ресурсоёмких технологических процессов и соответствующая ответственность принимаемых на основе измерительной информации решений;

- невозможность, как правило, непосредственного измерения исследуемых физических величин и необходимость применения методов телеметрии;

- измеряемая информация является формализованной – *данными*, обрабатываемыми по алгоритмам **электронной вычислительной техники (ЭВТ)**.

Перечисленные особенности процессов сбора и обработки измерительной информации при испытаниях СТК обуславливают режимы работы измерительных средств, средств передачи информации и ЭВТ на пределах их возможностей.

Существенное усложнение состава, структуры и режимов функционирования новых и перспективных СТК сопровождается лавинообразным ростом объёма информации, вызывающим необходимость адекватного развития и совершенствования измерительного комплекса и средств обработки информации.

В сложившихся условиях финансово-экономических ограничений на развитие и модернизацию измерительных комплексов, не позволяющих существенно увеличить пропускную способность каналов связи и передачи данных, определяющее значение для повышения эффективности информационно-измерительного обеспечения испытаний и штатной эксплуатации СТК приобретают новые методы обработки данных измерений, которые могут составить основу новых измерительных, вычислительных и информационных технологий.

Качество обработки информации может быть достигнуто, в частности, путём внедрения новых алгоритмических методов обработки измерительной информации на основе математического аппарата нетрадиционной прикладной теории конечных полей, как системообразующей основы объединения различных этапов обработки информации на принципиально новой научно-методической базе. Её основу составляет **конструктивная теорема об остатках (КТО)** [5].

В [6] предложены алгоритмы представления, передачи телеметрических данных с СТК в нетрадиционном виде (гомоморфными образами-остатками) и восстановления исходной информации на основе КТО.

Новые структуры передаваемых с СТК данных и КТО позволяют повысить эффективность их обработки путём использования новых алгоритмов, ориентированных на эти новые структуры данных. Таким образом, актуальной становится научная задача разработки новых технологий, позволяющих осуществлять обработку данных в образах без обратного приведения сообщений к первоначальному виду. Особое значение в решении этой научной задачи име-

ет способность КТО восстанавливать не только целые числа из целых образов, как это имеет место в классической теории конечных полей [3], но и рациональные числа, которыми, как правило, являются телеметрируемые с СТК данные, из образов – рациональных чисел.

1. Особенности решения основных задач статистической обработки телеизмерений

Телеметрируемые данные представляют собой дискретные (в соответствии с разрядной сеткой измерительного преобразователя) значения непрерывных телеметрируемых параметров, измеренные в дискретные моменты времени. В статистическую обработку телеизмерений включается решение задач аппроксимации, интерполяции или экстраполяции, что предполагает выполнение операций матричной алгебры, в частности – решение систем линейных уравнений.

Значения телеметрируемых параметров получают в основном путем проведения косвенных, совокупных и совместных измерений [8]. Обработка результатов этих классов измерений также предполагает использование математического аппарата матричной алгебры.

Ресурсоемкость матричных операций и точность решения задач существенно зависят от корректности математической задачи. Одним из характерных признаков корректности математической задачи является устойчивость решения. Некорректными, в частности, считаются задачи, в которых малые изменения значений исходных данных приводят к значительным изменениям значений результатов решения этих задач. Для некорректных задач точное решение с приближёнными исходными данными нельзя принимать в качестве приближённого решения. Корректность (некорректность) задачи проявляется в обусловленности матриц, используемых при решении задачи. Характеристикой обусловленности матрицы A является число $\mu(A)$ [4]. При $\mu(A) \gg 1$ матрица является плохо обусловленной, а задача, решаемая с помощью плохо обусловленной матрицы, математически некорректной.

Корректность задачи обуславливается исходными данными и, соответственно, число обусловленности матрицы также непосредственно зависит от исходных данных и поэтому не поддается уменьшению.

В настоящее время существуют методы решения некорректных задач [9], однако они крайне ресурсоемки и реализуются только с помощью высокопроизводительных вычислительных средств, не всегда применимы и дают приближенные результаты расчётов.

Задачи аппроксимации, интерполяции и экстраполяции, как правило, характеризуются плохо обусловленными матрицами. Поэтому решение этих задач при обработке телеметрической информации с СТК в ограниченные временные интервалы является сложной научно-технической задачей. Одним из способов её решения является применение математического аппарата нетрадиционной прикладной теории конечных полей в качестве системообразующей основы объединения различных этапов обработки информации на принципиально новой научно-методической основе – конструктивной теореме об остатках (КТО) [5].

2. Применение математического аппарата нетрадиционной прикладной теории конечных полей для решения основных задач статистической обработки телеизмерений

На обусловленность матрицы существенно влияет разрядность её элементов – исходных данных. Невозможность изменения исходных данных делает невозможным уменьшение числа $\mu(A)$ обусловленности матрицы и вызывает необходимость применения специальных ресурсоемких методов решения некорректных задач.

Однако применение математического аппарата *нетрадиционной прикладной теории конечных полей (НПТКП)* на основе КТО позволяет декомпозировать решение некорректной задачи на решение нескольких корректных задач, решаемых параллельно. Это позволяет сократить время и повысить точность решения исходной задачи.

В [5, 6] описано применение НПТКП для передачи *телеметрируемого параметра (ТПП)* по каналу передачи данных (рис. 1), где каждому измеренному значению x_i телеметрируемого параметра $X = \langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_N \rangle$ ставятся в соответствие j образов-остатков $x_{j,i}$ (например, при $j = 3$), вычисленных по формуле

$$x_{j,i} = x_i \bmod m_j, \quad j = \overline{1,3}. \quad (1)$$

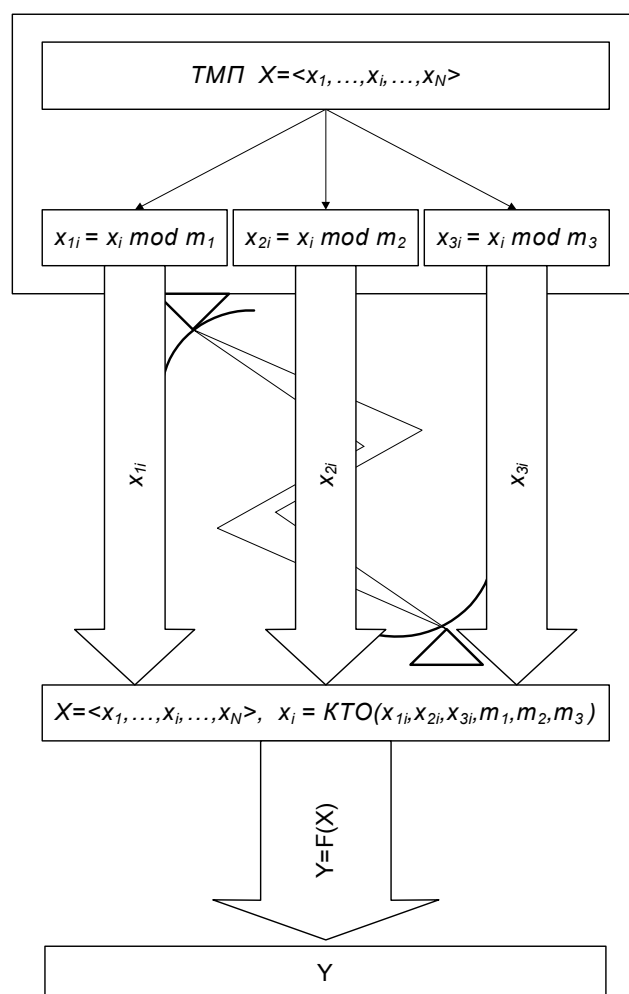


Рис. 1. Применение НПТКП для передачи телеметрического параметра по каналу передачи данных

Образы-остатки передаются по каналу передачи данных на приёмную сторону, где с помощью КТО восстанавливаются значения телеметрируемого параметра X . Передача значений телеметрируемого параметра в форме образов-остатков имеет ряд преимуществ по помехоустойчивости и возможностям криптографического закрытия информации. Дальнейшая статистическая обработка $Y = F(X)$ значений телеметрируемого параметра осуществляется классическими методами.

Однако возможности НПТКП не исчерпываются передачей значений телеметрируемого параметра образами-остатками. В образах-остатках возможна и некоторая часть статистической обработки значений телеметрируемого параметра, обладающая определенными преимуществами перед классической его обработкой. Одним из основных таких преимуществ является *переход от выполнения матричных операций с плохо обусловленными матрицами к выполнению матричных операций с матрицами с меньшим числом $\mu(A)$ обусловленности*, матрицами, элементами которых являются образы-остатки элементов исходных матриц. Операции с такими матрицами уже не требуют применения специальных сложных ресурсоемких методов решения некорректных задач, а потому более быстры и точны.

Число $\mu(A)$ обусловленности матрицы, по определению [10], равно

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|, \quad (2)$$

где $\|A\|$ – согласованная (подчиненная) норма матрицы A .

Известны различные согласованные нормы матриц, эквивалентные с точки зрения сходимости:

$$m - \text{норма} \quad \|A\|_m = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad (3)$$

$$l - \text{норма} \quad \|A\|_l = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \quad (4)$$

$$\text{Норма Фробениуса} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}, \quad (5)$$

$$\begin{array}{l} p - \text{норма} \\ (\text{при } p = 2 - \text{евклидова} \\ \text{норма}) \end{array} \quad \|A\|_p = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (6)$$

Из выражений (3)-(6) следует, что норма матрицы уменьшается с уменьшением абсолютных значений её элементов. Уменьшение абсолютных значений элементов матриц и обеспечивает переход от значений элементов матрицы к образам-остаткам.

Широкое распространение технологии решения задач в образах-остатках ограничивается методом восстановления исходных значений чисел на основе китайской теоремы об остатках [3], основной недостаток которого – восстановление только целых чисел, в то время как значения телеметрических параметров чаще всего являются вещественными числами. Восстановление вещественных чисел из вещественных образов-остатков и, соответственно, возможности

использования технологии решения задач в образах-остатках в полной мере обеспечиваются математическим аппаратом НПТКП на основе КТО.

"Платой" за быстроту и повышение точности решений является увеличение общего количества вычислений, которые, однако, проводятся параллельно и в целом заканчиваются быстрее классических методов. Увеличение количества вычислений связано с необходимостью проведения вычислений с каждым из j образов-остатков, но при этом вычисления производятся параллельно, с числами меньшими по абсолютной величине, чем в классических методах, имеющими меньшее количество разрядов и, следовательно, быстрее. Увеличение количества вычислений компенсируется отсутствием необходимости применять методы решения некорректных задач.

К сожалению, выполнить полный цикл матричных операций в образах-остатках не представляется возможным. В связи с использованием при решении указанных задач составных модулей не каждый элемент имеет соответствующий ему обратный элемент. Это делает невозможной операцию деления и позволяет выполнять в образах остатков только операции сложения (вычитания) и умножения. Однако этих операций достаточно, чтобы находить определители матриц и решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Литература

1. **ГОСТ Р 51170-98.** Качество служебной информации. Термины и определения.
2. **ГОСТ Р ИСО/МЭК 9126-93.** Информационная технология. Оценка программной продукции. Характеристики качества и руководства по их применению.
3. **Айерлэнд К., Роузен М.** Классическое введение в современную теорию чисел. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 416 с.
4. **Интернет-университет** информационных технологий. <http://www.intuit.ru/departament/calculate/calcmathbase/2/2.html>.
5. **Кукушкин С.С.** Конечные поля и информатика. Монография: в 2-х томах. Т. 1. Методы и алгоритмы, классические и нетрадиционные, основанные на использовании конструктивной теоремы об остатках. М.: МО России, 2003. 281 с.
6. **Кукушкин С.С., Гладков И.А., Чаплинский В.С.** Методы и информационные технологии контроля состояния динамических систем. М.: МО России, 2008. 327 с.
7. **Линник Ю.В.** Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1958. 334 с.
8. **РМГ 29-99.** Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения. М.: Изд-во стандартов. 2000.
9. **Тихонов Д. Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации "Доклады АН СССР", 1963, т. 151, № 3.
10. **Самарский Л.А., Гулин А.В.** Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. 432 с.