

**О.В. Иванова**

(Московский физико-технический институт (ГУ);  
e-mail: olk\_06@mail.ru)

## **АНАЛИЗ ДОСТИЖИМОСТИ ОБЪЕКТОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ С УЧЁТОМ СТРУКТУРЫ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ**

*Разработана методика оценки доступности объекта обслуживания с учётом топологии (доступности) транспортной сети. Используются автоматизированные системы для обеспечения возможности замены данных о состоянии транспортной сети в зависимости от изменения ситуации на объекте. Материал может быть полезен при решении проблем техносферной безопасности.*

*Ключевые слова: транспортная сеть, граф, оценка доступности объекта.*

**O.V. Ivanova**

## **REACHABILITY ANALYSIS OF OBJECTS UNDER SERVICE BASED ON TRANSPORT NETWORK STRUCTURE**

*The technique of accessing the availability of the object under service based on the topology analyses (reachability) of transport network. Automatic systems for ensuring providing swappable data related to transport network structure depending on the changing situation on the facility. The material can be helpful in solving the problems of technosphere safety.*

*Key words: transport network, graph, availability assessment of facility.*

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 9 декабря 2013 г.

Одной из важнейших повседневных задач для работы подразделений МЧС России является оценка достижимости объектов обслуживания. Ежегодно происходит множество опасных событий (происшествий) различного характера, угрожающих безопасности людей. Рассмотрим данную задачу с точки зрения работы подразделений МЧС. При поступлении сигнала об опасном событии, подразделению МЧС необходимо как можно быстрее добраться до места происшествия. В данной статье решается задача достижимости объектов в зависимости от их местоположения, удалённости от ближайшего центра МЧС с готовой к выезду специализированной техникой и выбора оптимального маршрута. После определения центра, способного разрешить возникшую ситуацию максимально быстро, возникает вопрос оптимизации маршрута. Для максимально быстрого достижения объекта необходимо учитывать такие факторы, как удаленность объекта, состояние дорог и возможность объезда транспортных пробок. В данной задаче достижимости объекта кратчайший по транспортной сети путь не всегда оказывается оптимальным, так как необходимо максимально уменьшить время достижения объекта, а не пройденный при этом путь.

Таким образом, при практическом принятии решения важнее оказывается локальная задача оптимального проезда по транспортной сети (в используемых алгоритмах скорость важнее длины транспортных плеч, например, при объезде

транспортных пробок) [1]. Более глобальные задачи оптимального проезда по транспортной сети тоже могут быть решены с использованием рассматриваемого в статье алгоритма.

Любая транспортная сеть, рассматриваемая в данной статье, является управляемой по некоторому набору заданных параметров, каждый из которых может быть изменен в процессе её моделирования [2].

Ниже рассматриваются разреженные графы транспортных сетей. Модель графов – одна из самых распространенных при анализе сетей [1]. Начиная с любого выбранного числа узлов  $N$ , генератор случайных графов способен добавить ребро между каждой парой узлов с заданной вероятностью  $p$ . Список свойств графа включает изменение фазового размера наибольших составляющих, диаметр логарифмического размера графа и другие. Большинство исследований сосредоточено на анализе случайных графов. Эта идея полезна для сравнения используемых в статье алгоритмов с другими методами анализа разреженных графов.

На графах матрицы смежности накапливают информацию о различных путях. Иногда в графах отсутствуют прямые пути (нециклический граф) [3]. У нециклических графов при вычислении степени матрицы смежности в итоге получаем ноль, после  $n$  итераций, в зависимости от количества связей графа. Описанный в [3] алгоритм может быть успешно применен на практике при решении задач оптимизации с учётом некоторого набора факторов, которые учитываются в алгоритме в качестве входных параметров.

### **Разложение собственных значений и сингулярное разложение матрицы смежности графа**

Матрица смежности графа  $A$  размерности  $N \times N$  имеет собственный вектор  $x$  и соответствующее ему собственное значение  $\lambda$  [4]. Этот метод приводит к ортонормированному базису матрицы смежности и часто фигурирует в анализе матриц смежности графов. Сингулярное разложение (англ. SVD) матрицы смежности графа  $A$  также приводит к ортогональному базису [5].

Транспортные сети – это большие, но разреженные графы, в которых большинство элементов матрицы смежности равны нулю. В действительности, любые множественные связи могут быть представлены в виде графа и смоделированы надлежащим образом. Алгоритм кластеризации графов может быть применён для различных транспортных сетей. В работе [4] рассматриваются разреженные графы, которые описываются разреженной матрицей смежности. В дальнейшем будем использовать термины графа, разреженной матрицы смежности со столбцами и строками.

Оптимальный алгоритм кластеризации графов должен иметь следующие свойства:

- автоматически иллюстрировать группы кластеров;
- кластеризовать и строки и столбцы матрицы смежности;
- измеримость;

- возможность обновления и изменения данных;
- применимость как к единичным, так и к бинарным графам. Для единичного графа должно выполняться дополнительное условие – матрица смежности должна быть квадратной. Для бинарного графа такого ограничения нет.

Опишем алгоритм, удовлетворяющий всем вышеперечисленным свойствам. Ниже он используется для анализа разреженных графов транспортных сетей. Целями алгоритма являются:

- нахождение кластеров;
- нахождение узлов;
- вычисление пространства между кластерами.

Интуитивно определяются группы узлов и ребер, расположенные таким образом, чтобы они образовывали как можно более "схожие" или "однородные" прямоугольные области. Под однородностью подразумевается, что ребра графа расположены близко друг к другу. Эти области различной плотности будут сжато описывать основную структуру связей между узлами графа. В данном методе в качестве исходных данных используются столбцы и строки матрицы смежности. С его использованием можно автоматически определить большое количество групп для строк и столбцов матрицы смежности.

С использованием алгоритма также можно изменить порядок строк и столбцов, выявить структуру матрицы смежности. Затем он использует структуру, найденную на предыдущем шаге, для автоматического поиска "ненормальных" ребер, а также для вычисления расстояний между парами групп. Для более полной иллюстрации алгоритма представим несколько итераций. Начиная с первой итерации, кластеризация последовательно совершенствуется, а число кластеров увеличивается. В итоге достигается "правильная кластеризация". Сначала обсудим этот алгоритм, далее сформулируем данные для описания модели и соответствующие функции для каждой возможной модели кластеризации. Далее описан метод автоматизации без учёта параметров поиска необходимой кластеризации. Затем полученные кластеры используются для вычисления межкластерного расстояния.

В конце работы представлены экспериментальные результаты основных типов транспортных сетей и краткое описание. Существует множество параметров, для которых необходимо найти закономерности, корреляции и правила. Для большинства этих задач существуют стандартные методы. Тем не менее, за редким исключением, они используются интерактивно из-за наличия внутренних ошибок. Вот, например, один из таких подходов, причем наиболее распространённый: группу кластеризуют только по одному измерению, то есть, дан набор точек  $N$  и размер  $m$ , где находятся группы из  $n$  точек. Этот параметр применим в ряде приложений, но он отличается от рассматриваемой в настоящей статье задачи. Кроме того, большинство алгоритмов используют параметры, задаваемые пользователем, такие как количество кластеров  $k$  в популярном методе  $K$ -средних, который автоматически обеспечивает только локальный экстремум. Задача нахождения глобального экстремума в методе  $K$ -средних достаточно сложна, чем и привлекла к себе внимание в последнее время.

## Описание метода анализа разреженных графов

Пусть у нас есть кластеризованный граф  $G$ , а  $A$  его прямоугольная матрица смежности размера  $M \times N$  ( $M = N$ , если  $G$  – единственный граф). Определим количество строк как  $1, 2, \dots, M$  и количество столбцов как  $1, 2, \dots, N$ . Перекрестную ассоциацию  $(\Phi, \Psi)$ , содержащую кластеры, состоящие из  $k$  строк и  $l$  столбцов, определим как:

$$\begin{aligned}\Phi: \{1, 2, \dots, M\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, k\}; \\ \Psi: \{1, 2, \dots, N\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, l\},\end{aligned}$$

где  $\Phi$  и  $\Psi$  – отображения строк и столбцов кластеров.

Для единичного графа, где строки и столбцы представлены в виде квадратной матрицы,  $\Phi = \Psi$  и  $k = l$ . С заданными  $(\Phi, \Psi)$ , переставляются строки и столбцы матрицы  $A$  так, чтобы они группировались, создавая отдельные блоки размерности  $k \times l$  (называемые перекрестной ассоциацией), которая определяется как  $A_{i,j}$  с  $i = 1, 2, \dots, M$  и  $j = 1, 2, \dots, N$ . Каждый блок  $A_{i,j}$  имеет размер  $n(A_{i,j}) = a_i b_j$  и содержит  $n_0(A_{i,j})$  нулей и  $n_1(A_{i,j})$  единиц. Исходя из этого, подсчитывается плотность  $P_1(A_{i,j})$  единиц в блоке. Высокая (низкая) плотность означает, что рассматриваемый кластер имеет сильную (слабую) связь с другими кластерами. Выше описана данная модель.

Для сжатия матрицы используется всего несколько блоков, каждый из которых однородный. Однако, имея больше кластеров, необходимо создать больше однородных блоков (если имеется всего один кластер размера  $M \times N$ , будет существовать единственный блок размера  $1 \times 1$ ). Таким образом, наилучшая схема сравнения должна представлять собой компромисс между этими двумя факторами: количеством содержащихся точек и наилучшим значением для  $k$  и  $l$ . Это достигается с использованием критерия минимальной длины описания (англ. MDL), где стоимость сжатия основана на количестве бит, необходимых для сжатия строк и столбцов, так же как и каждый блок, заданный в группе.

В суммарной функции стоимости учитываем:

- размер матрицы  $m \times n$ ;
- количество строк и столбцов;
- количество групп;
- количество строк для каждой группы строк и количество столбцов для каждой группы столбцов;
- для каждой перекрестной ассоциации количество единиц  $n_1(A_{i,j})$ .

С учётом этого суммарная функция стоимости:

$$T(A; k, l, \Phi, \Psi) = \log^* k + \log^* l + \sum_{i=1}^{k-1} \lceil \log \bar{a}_i \rceil + \sum_{j=1}^{l-1} \lceil \log \bar{b}_j \rceil + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \lceil \log(a_i b_j + 1) \rceil + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l C(A_{i,j}),$$

где  $\log^*$  – универсальный код;

$C(A_{i,j})$  – стоимость при  $\Phi = \Psi$ .

## Результаты анализа типовых разреженных графов транспортных сетей

Проведём анализ различных типов разреженных графов транспортных сетей с разреженной матрицей смежности.

**Пример 1.** Анализ регулярной циклической транспортной сети с использованием графа с разреженной матрицей смежности [6]. На рис. 2 показано, как решается задача кластеризации графа транспортной сети, изображенного на рис. 1.

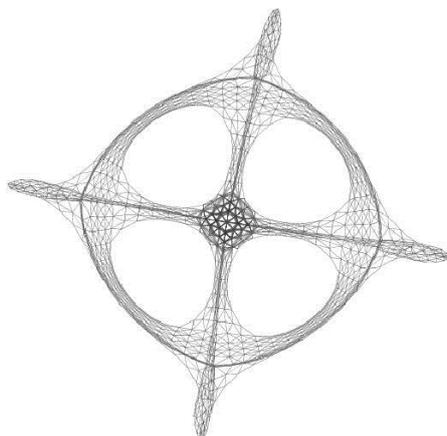


Рис. 1. Симметрично соединенный разреженный граф

Симметричный бинарный разреженный граф представляется квадратной разреженной матрицей смежности размера  $(1005 \times 1005)$ , 8621 элементов которой – ненулевые [7]. Ранг матрицы смежности равен 1005. Получаем распределение  $N_x$  и  $N_y$  – количество строк и столбцов разреженной матрицы смежности соответственно, как изображено на рис. 2.

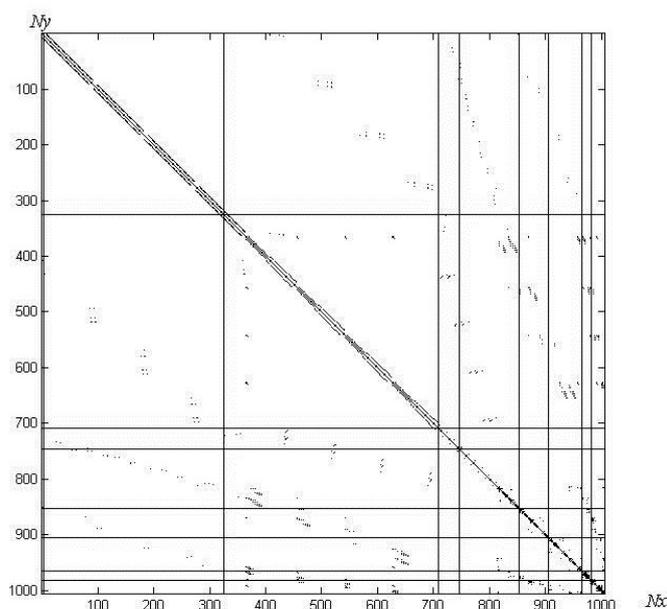
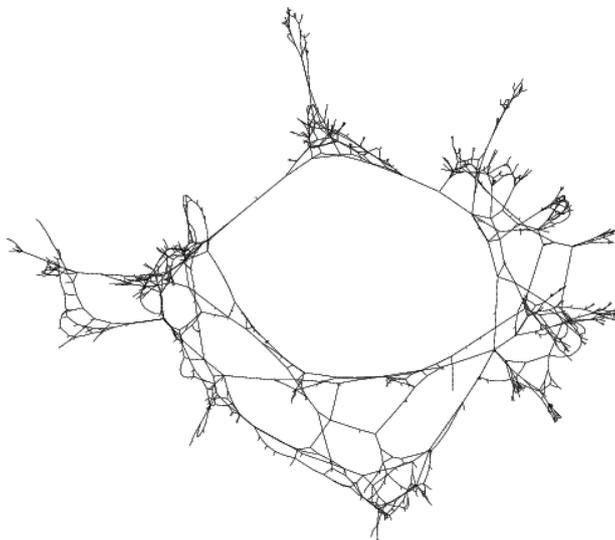


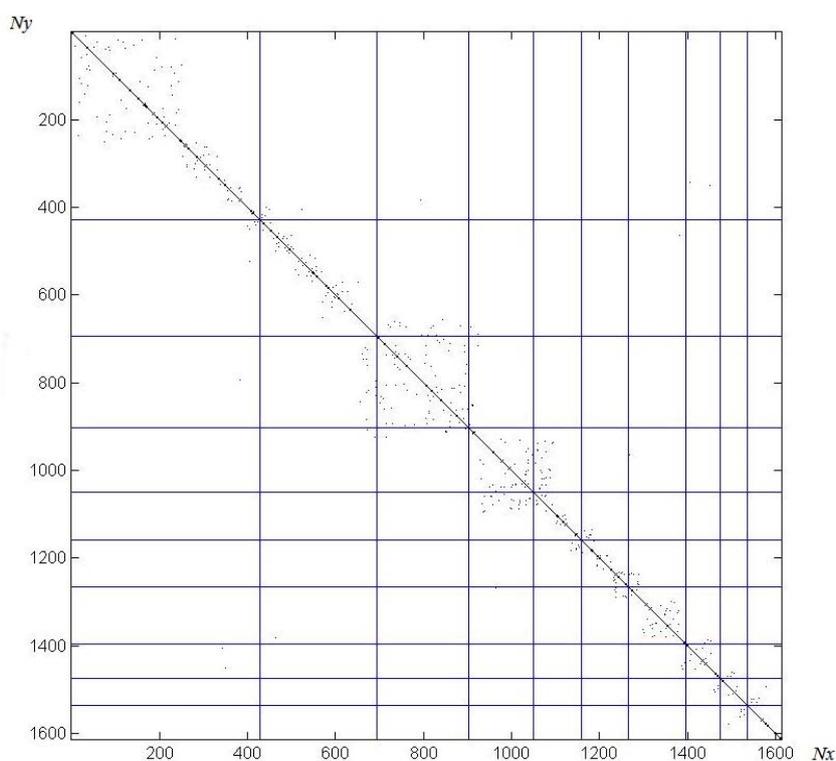
Рис. 2. Зависимость параметров от ранга матрицы смежности разреженного графа

**Пример 2.** Пример разреженной транспортной сети с разреженной матрицей смежности изображен на рис. 3. На графе рассматривается 1612 узлов и 2106 рёбер.



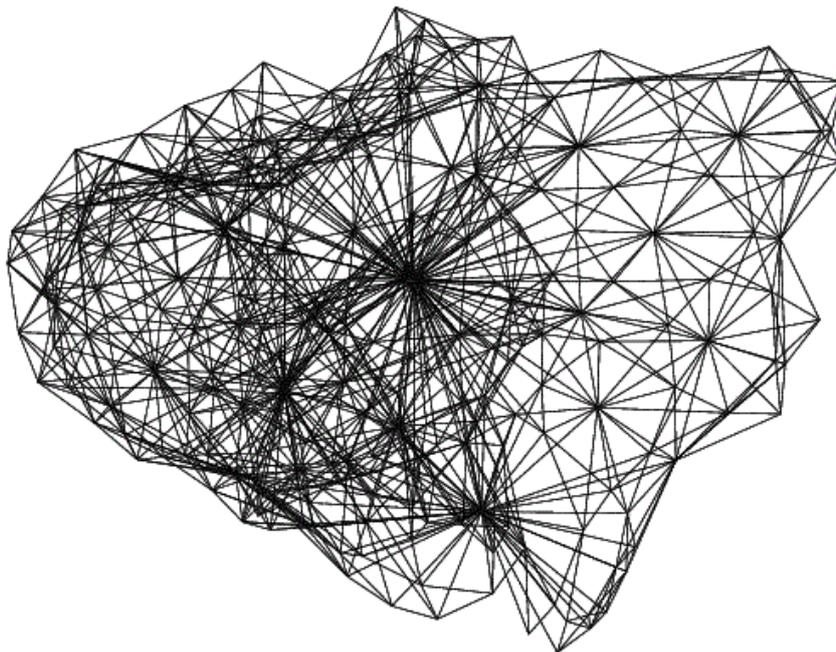
**Рис. 3.** Разреженный граф разреженной транспортной сети

На рис. 4 показано решение задачи кластеризации транспортной сети, изображенной на рис. 3. Граф представлен в виде разреженной матрицы смежности размером  $(1612 \times 2106)$ . Получаем распределение  $N_x$  и  $N_y$  – количество строк и столбцов разреженной матрицы смежности соответственно.



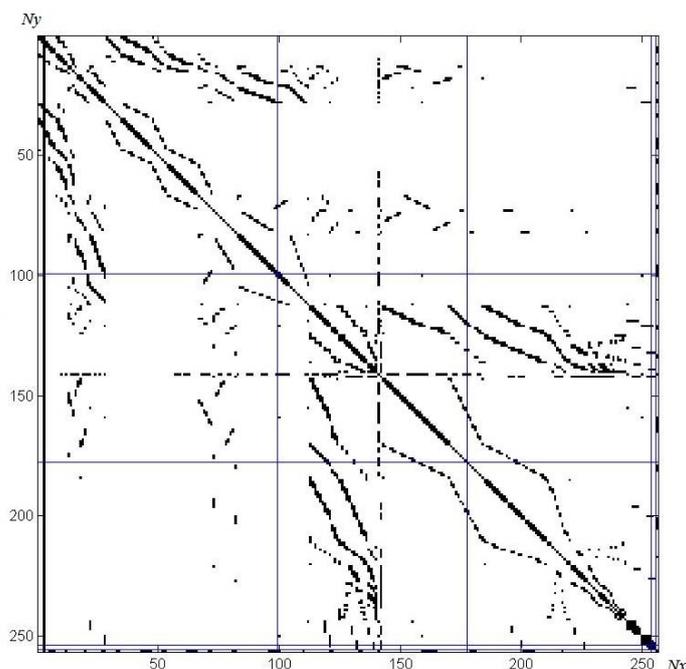
**Рис. 4.** Зависимость параметров от ранга матрицы смежности разреженного графа

**Пример 3.** Пример плотной транспортной сети с разреженной матрицей смежности изображен на рис. 5. На графе рассматривается 256 узлов и 1330 рёбер.



**Рис. 5.** Разреженный граф плотной транспортной сети

На рис. 6 показано решение задачи кластеризации транспортной сети, изображенного на рис. 5. Граф представлен в виде разреженной матрицы смежности размером  $(456 \times 1330)$ . Получаем распределение  $N_x$  и  $N_y$  – количество строк и столбцов разреженной матрицы смежности соответственно.



**Рис. 6.** Зависимость параметров от ранга матрицы смежности разреженного графа

Определение кластеров на рисунках 2, 4, 6 позволяет оценивать локальную достижимость узлов по транспортной сети на рисунках 1, 3 и 5, соответственно.

Таким образом, оценив локальную достижимость объекта чрезвычайной ситуации, становится возможным ликвидировать ЧС максимально быстро за счет оптимизации достижимости объекта.

### Литература

1. *Erdős P. and Rényi A.* On the evolution of random graphs // Publication of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science, 5: 17-61 pp. 1960.
2. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 504 с.
3. *Харари Ф.* Теория графов // Пер. с англ. и предисл. В.П. Козырева. М.: Едиториал УРСС, 2003. 296 с.
4. *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery.* Numerical Recipes in C. Cambridge University Press. 1992.
5. *Chakrabarti D.* Tools for Large Graph Mining// Center for Automated Learning and Discovery School of Computer Science Carnegie Mellon University. 2005.
6. *Hu Y.* Matrix graphs, AT&T Labs Visualization Group. 2011.
7. *Иванова О.В.* Метод определения параметров больших графов в задачах логистики // Математическое моделирование информационных систем. М.: МФТИ. 2012. С. 49-52.