УДК 536.24

В.В.Рубцов
(Московский государственный строительный университет;
e-mail: rubval1@yandex.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В МНОГОСЛОЙНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Предложен новый подход к численному моделированию нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в системе, ограниченной многослойным теплопроводным телом сферической формы и заполненной поглощающей и рассеивающей средой. Изложенный материал может быть использован для решения актуальных проблем обеспечения пожарной безопасности.

Ключевые слова: радиационно-кондуктивный теплообмен, поглощающая и рассеивающая среда, коэффициент теплопроводности.

V.V. Rubtsov

NUMERICAL MODELING OF UNSTEADY RADIATIVE-CONDUCTIVE HEAT TRANSFER IN MULTI-LAYERED SPHERICAL SYSTEM

The new approach to the numerical modeling of unsteady radiative-conductive heat transfer in the system bounded multi-layered thermally conductive body of spherical shape and filled with an absorbing and scattering medium. The material described can be used to solve actual problems related to fire safety.

Key words: radiative-conductive heat transfer, absorbing and scattering medium, coefficient of thermal conductivity.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 3 июня 2015 г.

Рассматриваются три постановки задачи, характеризующиеся различными типами граничных условий, заданных на внешней границе системы.

Первая постановка задачи. Пусть имеется теплопроводное тело сферической формы без источников (стоков) тепла, ограниченное поверхностями F_0, F_n и состоящее из n слоёв $V_k : V = V_1 + V_2 + ... + V_n$. Примем, что контакт между слоями V_k и V_{k+1}, $k = 1, 2, ..., n-1$, совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях F_k, $k = 1, 2, ..., n-1$, двух слоёв одинакова. Заданы постоянные коэффициенты теплопроводности λ_k, удельные теплоемкости c_k и плотности ρ_k слоёв V_k, $k = 1, 2, ..., n$. Поверхность F_0 примем серой, диффузно излучающей и отражающей с коэффициентом поглощения A_0. Поверхность F_n положим изотермической с температурой $T_{F_n}(t)$, зависящей от времени t

(граничное условие первого рода). Обозначим через V_0 пространство, ограниченное поверхностью F_0, заполненное однородной ослабляющей средой с температурой $T_e(t)$ и заданными коэффициентами объёмного поглощения α и рассеяния β [1]. Кроме того, предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ заданы температуры $T_{k0}(M_k)$ слоёв V_k, $M_k \in V_k$, $k = 1, 2, ..., n$, зависящие лишь от расстояния точки M_k до центра сферического тела V (рис. 1).

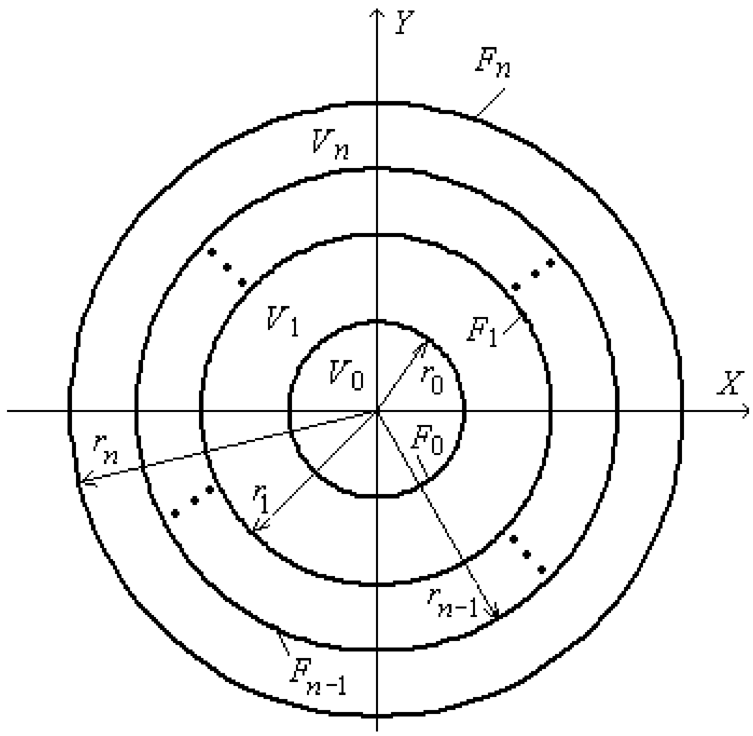

Рис. 1. Схема излучающей системы

Требуется определить на заданном промежутке времени $0 < t \le t^*$ нестационарные поля температур $T_k(M_k, t)$ в слоях V_k, $M_k \in V_k$, $k = 1, 2, ..., n$, и нестационарное поле значений плотности объёмного результирующего излучения $\eta_{\text{рез}}(M_0, t)$ в поглощающей и рассеивающей среде, заполняющей пространство V_0, $M_0 \in V_0$ [2].

Следует заметить, что в силу предположения об отсутствии в теле V источников (стоков) тепла, функции $T_k(M_k, t)$ должны удовлетворять неравенствам [3]

$$0 < m_* \le T_k(M_k, t) \le m^*,\ M_k \in V_k,\ k = 1, 2, ..., n,\ 0 \le t \le t^*,$$

где m_* и m^* – соответственно наименьшее и наибольшее значения заданных в системе температур $T_e(t)$, $T_{F_n}(t)$, $0 \le t \le t^*$, и $T_{k0}(M_k)$, $M_k \in V_k$, $k = 1, 2, ..., n$.

Математическая постановка задачи в сферической системе координат формулируется следующим образом:

- найти функции $T_k(r,t)$, определенные при $r_{k-1} \le r \le r_k$, $0 < t \le t^*$, $k = 1, 2, ..., n$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям теплопроводности

$$\frac{\partial T_k(r,t)}{\partial t} = a_k \left[\frac{\partial^2 T_k(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_k(r,t)}{\partial r} \right], 0 < r < r_k,\ 0 < t \le t^*,\ k = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

граничным условиям

$$T_k(r_k,t) = T_{k+1}(r_{k,}t),\ 0 < t \le t^*,\ k = 1, 2, ..., n-1, \tag{2}$$

$$\lambda_k \frac{\partial T_k(r_k,t)}{\partial r} = \lambda_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}(r_k,t)}{\partial r},\ 0 < t \le t^*,\ k = 1, 2, ..., n-1, \tag{3}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0,t)}{\partial r} = E_{\text{рез.0}}(t) = A_0 \sigma_0 \left[T_1^4(r_0,t) - T_e^4(t) \right] \left(\tilde{\Pi}_{0,0} - 1 \right),\ 0 < t \le t^*, \tag{4}$$

$$T_n(r_n,t) = T_{F_n}(t),\ 0 < t \le t^*, \tag{5}$$

начальным условиям

$$T_k(r,0) = T_{k0}(r),\ r_{k-1} \le r \le r_k,\ k = 1, 2, ..., n, \tag{6}$$

неравенствам

$$0 < m_* \le T_k(r,t) \le m^*,\ k = 1, 2, ..., n,\ r_0 \le r \le r_n,\ 0 \le t \le t^*; \tag{7}$$

- определить $\eta_{\text{рез}}(r,t)$ на основании соотношения [2]

$$\eta_{\text{рез}}(r,t) = 4\alpha\sigma_0 \left[T_1^4(r_0,t) - T_e^4(t) \right] \tilde{\Pi}_{0,0}^{(1)}(r, F_0), 0 \le r < r_0, 0 \le t < t^*. \tag{8}$$

Здесь $E_{\text{рез.0}}$ – поверхностная плотность результирующего излучения [2];

$a_k = \dfrac{\lambda_k}{c_k \rho_k}$ – коэффициент температуропроводности сферического слоя V_k;

σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана;

$\tilde{\Pi}_{0,0}$ – вероятность перехода излучения от произвольной единичной площадки на оптически и энергетически однородной поверхностной зоне F_0 и поглощения его этой зоной [4];

$\tilde{\Pi}_{0,0}^{(1)}(r, F_0)$ – вероятность перехода излучения от единичного элемента объёма в точке с координатой *r* оптически и энергетически однородной объёмной зоны V_0 и его поглощения поверхностной зоной F_0 [4].

Вероятности $\tilde{\Pi}_{0,0}$ и $\tilde{\Pi}_{0,0}^{(1)}(r, F_0)$ находятся с помощью обобщенного зонального метода [5] с использованием расчётных формул и выражений, полученных в [6].

Задачу (1)-(8) удобно представить в безразмерном виде

$$\frac{\partial\theta_k(\xi,\tau)}{\partial\tau}=\nu_k\left[\frac{\partial^2\theta_k(\xi,\tau)}{\partial\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial\theta_k(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right],\ \xi_{k-1}<\xi<\xi_k,\ 0<\tau\le\tau^*, \tag{9}$$

$$k=1,2,...,n,$$

$$\theta_k(\xi_k,\tau)=\theta_{k+1}(\xi_k,\tau),\ 0<\tau\le\tau^*,\ k=1,2,...,n-1, \tag{10}$$

$$\delta_k\frac{\partial\theta_k(\xi_k,\tau)}{\partial\xi}=\delta_{k+1}\frac{\partial\theta_{k+1}(\xi_k,\tau)}{\partial\xi},\ 0<\tau\le\tau^*,\ k=1,2,...,n-1, \tag{11}$$

$$-\frac{\partial\theta_1(\xi_0,\tau)}{\partial\xi}=e_{\text{рез.0}}(\tau)=N_0\left[\theta_1^4(\xi_0,\tau)-\theta_e^4(\tau)\right]\left(\overset{\square}{\mathrm{H}}_{0,0}-1\right),\ 0<\tau\le\tau^*, \tag{12}$$

$$\theta_n(\xi_n,\tau)=\theta_n(1,\tau)=\theta_{F_n}(\tau),\ 0<\tau\le\tau^*, \tag{13}$$

$$\theta_k(\xi,0)=\theta_{k0}(\xi),\ \xi_{k-1}\le\xi\le\xi_k,\ k=1,2,...,n, \tag{14}$$

$$0<\mu\le\theta_k(\xi,\tau)\le 1,\ \xi_{k-1}\le\xi\le\xi_k,\ 0<\tau\le\tau^*,\ k=1,2,...,n \tag{15}$$

$$q_{\text{рез}}(\xi,\tau)=\left[\theta_1^4(\xi_0,\tau)-\theta_e^4(\tau)\right]\overset{\square}{\mathrm{H}}{}^{(1)}(\xi,F_0),\ 0\le\xi<\xi_0,\ 0\le\tau\le\tau^*, \tag{16}$$

где $\theta=\dfrac{T}{m^*}$, $\xi=\dfrac{r}{r_n}$, $\tau=\dfrac{a_1t}{r_n^2}$, $\nu_k=\dfrac{a_k}{a_1}$, $\delta_k=\dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}$, $N_0=\dfrac{A_0\sigma_0r_nm^{*3}}{\lambda_1}$, $\mu=\dfrac{m_*}{m^*}$,

$$e_{\text{рез.0}}=\frac{E_{\text{рез.0}}r_n}{\lambda_1m^*},\ q_{\text{рез}}=\frac{\eta_{\text{рез}}}{4\alpha\sigma_0m^{*4}}.$$

Вторая постановка задачи. Вторая постановка задачи характеризуется заданием на поверхности F_n граничного условия второго рода, а именно, предположим, что поверхность F_n является адиабатической. В этом случае математическая постановка задачи определения нестационарных распределений температур в сферических слоях V_k, $k=1,2,...,n,$ приводится к решению дифференциальных уравнений (9) при граничных условиях (10)-(12) и граничном условии

$$\frac{\partial\theta_n(1,\xi)}{\partial\xi}=0,\ 0<\tau\le\tau^* \tag{17}$$

при начальных условиях (14) и ограничениях (15).

Третья постановка задачи. Предположим, что на поверхности F_n происходит радиационный теплообмен с поглощающей средой, температура которой равна $T_s(t)$ (граничное условие третьего рода). Поверхность F_n примем серой, диффузно излучающей и отражающей с заданным коэффициентом поглощения A_n.

В таком случае математическая постановка задачи определения нестационарных полей температур в сферических слоях V_k, $k=1,2,...,n$, формулируется следующим образом: найти решения $\theta_k(\xi,\tau)$, $k=1,2,...,n$, дифференциальных уравнений (9) при граничных условиях (10)-(12) и граничном условии [2]

$$\frac{\partial\theta_n(1,\tau)}{\partial\xi}=e_{\text{рез.}n}(\tau)=N_n\left[\theta_s^4(\tau)-\theta_n^4(1,\tau)\right],\ 0<\tau\le\tau^*, \tag{18}$$

при начальных условиях (14) и ограничениях (15).

Для решения сформулированных задач воспользуемся методом конечных разностей, предложенным в [7], и методом последовательных двусторонних приближений [3].

Первая постановка задачи. На основании изложенного в работе [3] представим граничное условие (12) в виде

$$-\frac{\partial\theta_1(\xi_0,\tau)}{\partial\xi}+4\theta N_0(\xi_1,\tau_0)=N_0\theta\left\{\left[(\xi_1^4,\tau_0)-\theta(\tau_e^4)\right]\Pi\left(\square_{0,0}1-\right)4\theta(\xi_1,\tau_0),\right\} \tag{19}$$

$$0<\tau\le\tau^*.$$

Введём на множестве $\xi_0\le\xi\le1$, $0\le\tau\le\tau^*$ сетку $\xi_{k,i}=\xi_{k-1}+i\Delta\xi_k$, $\tau_j=j\Delta\tau$, $i=0,1,...,L_k$, $k=1,2,...,n$, с шагами $\Delta\xi_k=\dfrac{\xi_k-\xi_{k-1}}{L_k}$, $\Delta\tau=\dfrac{\tau^*}{L_0}$. При этом целые числа L_k, $k=1,2,...,n$, удобно полагать четными. Принимая $\theta_{k,i}(\tau_j)=\theta_k(\xi_i,\tau_j)$, построим на основании [7] разностную аппроксимацию задачи (9)-(11), (19), (13)-(15) и для решения полученной разностной задачи воспользуемся итерационным процессом

$$\frac{\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1})-\theta_{k,i}(\tau_j)}{\Delta\tau}=\nu_k\left[\frac{\theta_{k,i+1}(\tau_j)-2\theta_{k,i}(\tau_j)+\theta_{k,i-1}(\tau_j)}{\left(\Delta\xi_k\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\left(\theta_{k,i+1}(\tau_j)-\theta_{k,i}(\tau_j)\right)}{\xi_i\Delta\xi_k}\right], \tag{20}$$

если $0<i<L_k$, $k=1,2,...,n$, $0\le j<L_0$, $i+j+k$ – нечетное число;

$$\frac{\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1})-\theta_{k,i}(\tau_j)}{\Delta\tau}=\nu_k\left[\frac{\theta_{k,i+1}^{(l)}(\tau_{j+1})-2\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1})+\theta_{k,i-1}^{(l)}(\tau_{j+1})}{\left(\Delta\xi_k\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\left(\theta_{k,i+1}^{(l)}(\tau_{j+1})-\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1})\right)}{\xi_i\Delta\xi_k}\right], \tag{21}$$

если $0<i<L_k$, $k=1,2,...,n$, $0\le j<L_0$, $i+j+k$ – чётное число;

$$\theta_{k,L_k}^{(l)}(\tau_{j+1})=\theta_{k+1,0}^{(l)}(\tau_{j+1}),\ k=1,2,...,n-1,\ 0\le j<L_0, \tag{22}$$

$$\delta_k \frac{\theta^{(l)}_{k,L_k}(\tau_{j+1}) - \theta^{(l)}_{k,L_k-1}(\tau_{j+1})}{\Delta\xi_k} = \delta_{k+1} \frac{\theta^{(l)}_{k+1,1}(\tau_{j+1}) - \theta^{(l)}_{k+1,0}(\tau_{j+1})}{\Delta\xi_{k+1}}, \tag{23}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1,\ 0 \le j < L_0,$$

$$\frac{\theta^{(l)}_{1,0}(\tau_{j+1}) - \theta^{(l)}_{1,1}(\tau_{j+1})}{\Delta\xi_1} + 4N_0\theta^{(l)}_{1,0}(\tau_{j+1}) = N_0\Big\{\Big[\theta^{(l-1)4}_{1,0}(\tau_{j+1}) - \theta^4_e(\tau_{j+1})\Big]\Pi\Big(\square_{0,0}1-\Big) +$$

$$+4\theta^{(l-1)}_{1,0}(\tau_{j+1})\Big\},\ 0 \le j < L_0, \tag{24}$$

$$\theta^{(l)}_{n,L_n}(\tau_{j+1}) = \theta_{n,L_n}(\tau_{j+1}) = \theta_{F_n}(\tau_{j+1}),\ 0 \le j < L_0, \tag{25}$$

$$\theta^{(l)}_{k,i}(0) = \theta_{k,i}(0) = \theta_{k0,i},\ 0 \le i \le L_k,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

Обозначим

$$\gamma_k = \frac{\nu_k \Delta\tau}{\left(\Delta\xi_k\right)^2},\ \omega_k = \frac{\delta_{k+1}\Delta\xi_k}{\delta_k \Delta\xi_{k+1}},\ \gamma_{k,i} = \frac{2\nu_k\Delta\tau}{\xi_i \Delta\xi_k},\ 0 < i < L_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

На основании (20)-(26) находим

$$\theta^{(l)}_{k,i}(\tau_{j+1}) = \theta_{k,i}(\tau_{j+1}) = \gamma_k\theta_{k,i-1}(\tau_j) + (1 - 2\gamma_k - \gamma_{k,i})\theta_{k,i}(\tau_j) +$$

$$+(\gamma_k + \gamma_{k,i})\theta_{k,i+1}(\tau_j), \tag{27}$$

если $0 < i < L_k,\ k = 1, 2\ldots, n,\ 0 \le j < L_0,\ i + j + k -$ нечетное число;

$$\theta^{(l)}_{k,i}(\tau_{j+1}) = \theta_{k,i}(\tau_{j+1}) = \frac{\theta_{k,i}(\tau_j) + \gamma_k\theta_{k,i-1}(\tau_{j+1}) + (\gamma_k + \gamma_{k,i})\theta_{k,i+1}(\tau_{j+1})}{1 + 2\gamma_k + \gamma_{k,i}}, \tag{28}$$

если $1 < i < i_k,\ i_k = L_k - 1,\ k = 1, 2, \ldots, n-1,\ i_n = L_n,\ i + j + k -$ четное число;

$$\theta^{(l)}_{k,L_k}(\tau_{j+1}) = \theta_{k,L_k}(\tau_{j+1}) = \tag{29}$$

$$= \frac{\left(1 + 2\gamma_{k+1} + \gamma_{k+1,1}\right)\theta_{k,L_k-1}(\tau_{j+1}) + \omega_k\left[\theta_{k+1,1}(\tau_j) + \left(\gamma_{k+1} + \gamma_{k+1,1}\right)\theta_{k+1,2}(\tau_{j+1})\right]}{1 + 2\gamma_{k+1} + \gamma_{k+1,1} + \omega_k\left(1 + \gamma_{k+1} + \gamma_{k+1,1}\right)},$$

$$\theta^{(l)}_{k+1,1}(\tau_{j+1}) = \theta_{k+1,1}(\tau_{j+1}) =$$

$$= \frac{\gamma_{k+1}\theta_{k,L_k-1}(\tau_{j+1}) + \left(1 + \omega_k\right)\left[\theta_{k+1,1}(\tau_j) + \left(\gamma_{k+1} + \gamma_{k+1,1}\right)\theta_{k+1,2}(\tau_{j+1})\right]}{1 + 2\gamma_{k+1} + \gamma_{k+1,1} + \omega_k\left(1 + \gamma_{k+1} + \gamma_{k+1,1}\right)}, \tag{30}$$

если $k + j -$ чётное число, $k = 1, 2, \ldots, n-1,\ 0 \le j < L_0;$

$$\theta^{(l)}_{k,L_k-1}(\tau_{j+1}) = \theta_{k,L_k-1}(\tau_{j+1}) =$$

$$= \frac{\left(1 + \omega_k\right)\left[\theta_{k,L_k-1}(\tau_j) + \gamma_k\theta_{k,L_k-2}(\tau_{j+1})\right] + \omega_k\left(\gamma_k + \gamma_{k,L_k-1}\right)\theta_{k+1,1}(\tau_{j+1})}{1 + \gamma_k + \omega_k\left(1 + 2\gamma_k + \gamma_{k,L_k-1}\right)}, \tag{31}$$

$$\theta_{k,L_k}^{(l)}(\tau_{j+1})=\theta_{k,L_k}(\tau_{j+1})=$$

$$=\frac{\omega_k\left(1+2\gamma_k+\gamma_{k,L_k-1}\right)\theta_{k+1,1}(\tau_{j+1})+\gamma_k\theta_{k,L_k-2}(\tau_{j+1})+\theta_{k,L_k-1}(\tau_j)}{1+\gamma_k+\omega_k\left(1+2\gamma_k+\gamma_{k,L_k-1}\right)},\qquad(32)$$

если $k+j$ – нечетное число, $k=1,2,...,n-1,\ 0\le j<L_0$;

$$\theta_{1,0}^{(l)}(\tau_{j+1})=\frac{\theta_{1,1}(\tau_{j+1})+\Delta\xi_1 f_0^{(l-1)}(\tau_{j+1})}{1+4N_0\Delta\xi_1},\qquad(33)$$

если j – нечетное число, $0\le j<L_0$;

$$\theta_{1,0}^{(l)}(\tau_{j+1})=\frac{\theta_{1,1}(\tau_j)+\left(\gamma_1+\gamma_{1,1}\right)\theta_{1,2}(\tau_{j+1})+\left(1+2\gamma_1+\gamma_{1,1}\right)\Delta\xi_1 f_0^{(l-1)}(\tau_{j+1})}{1+\gamma_1+\gamma_{1,1}+4N_0\Delta\xi_1\left(1+2\gamma_1+\gamma_{1,1}\right)},\qquad(34)$$

$$\theta_{1,1}^{(l)}(\tau_{j+1})=\frac{\left(1+4N_0\Delta\xi_1\right)\left[\theta_{1,1}(\tau_j)+\left(\gamma_1+\gamma_{1,1}\right)\theta_{1,2}(\tau_{j+1})\right]+\gamma_1\Delta\xi_1 f_0^{(l-1)}(\tau_{j+1})}{1+\gamma_1+\gamma_{1,1}+4N_0\Delta\xi_1\left(1+2\gamma_1+\gamma_{1,1}\right)},\qquad(35)$$

если j – четное число, $0\le j<L_0$.

В выражениях (33)-(35) использовано обозначение

$$f_0^{(l-1)}(\tau_{j+1})=N_0\left\{\left[\theta_{1,0}^{(l-1)4}(\tau_{j+1})-\theta_e^4(\tau_{j+1})\right]\left(H_{0,0}-1\right)+4\theta_{1,0}^{(l-1)}(\tau_{j+1})\right\}.$$

Полагая начальное приближение $\theta_{1,0}^{(0)}(\tau_{j+1})$ сначала равным μ

$$\theta_{1,0}^{(0)}(\tau_{j+1})=\theta_{*1,0}^{(0)}(\tau_{j+1})=\mu,\qquad(36)$$

а затем, принимая $\theta_{1,0}^{(0)}(\tau_{j+1})$ равным 1

$$\theta_{1,0}^{(0)}(\tau_{j+1})=\theta_{1,0}^{*(0)}(\tau_{j+1})=1,\qquad(37)$$

получим на основании соотношений (27)-(35) при $2\gamma_k+\gamma_{k,i}<1,\ 0<i<L_k$, $k=1,2,...,n,$ соответственно неубывающие $\theta_{*k,i}^{(l)}(\tau_{j+1})$ и невозрастающие $\theta_{k,i}^{*(l)}(\tau_{j+1}),\ 0\le i\le L_k,\ k=1,2,...,n,\ l=1,2,...,$ последовательности приближений, сходящиеся к единственному решению $\theta_{k,i}(\tau_{j+1}),\ 0\le i\le L_k,\ k=1,2,...,n,$ разностной задачи [2, 8].

В качестве приближенного решения этой задачи примем

$$\theta_{k,i}(\tau_{j+1})\approx\frac{1}{2}\left[\theta_{k,i}^{*(l)}(\tau_{j+1})+\theta_{*k,i}^{(l)}(\tau_{j+1})\right],\qquad(38)$$

где нижние $\theta_{*k,i}^{(l)}(\tau_{j+1})$ и верхние $\theta_{k,i}^{*(l)}(\tau_{j+1})$ последовательные приближения выбираем из условия

$$\left[\theta_{k,i}^{*(l)}(\tau_{j+1})-\theta_{*k,i}^{(l)}(\tau_{j+1})\right]<\varepsilon,\ 0\le i\le L_k,\ k=1,2,...,n,\qquad(39)$$

для заданного достаточно малого числа $\varepsilon>0$.

Вторая постановка задачи. В этом случае, применяя к решению разностной задачи, аппроксимирующей задачу (9)-(12), (17), (14), (15), рассмотренный выше итерационный процесс, приходим к формулам, аналогичным (26)-(35), а также к соотношениям

$$\theta_{n,L_n}^{(l)}(\tau_{j+1})=\theta_{n,L_n}(\tau_{j+1})=\theta_{n,L_n-1}(\tau_{j+1}),$$

если $j+n$ – четное число, $0\le j<L_0$;

$$\theta_{n,L_n-1}^{(l)}(\tau_{j+1})=\theta_{n,L_n-1}(\tau_{j+1})=\frac{\theta_{n,L_n-1}(\tau_j)+\gamma_n\theta_{n,L_n-2}(\tau_{j+1})}{1+\gamma_n},$$

$$\theta_{n,L_n}^{(l)}(\tau_{j+1})=\theta_{n,L_n-1}(\tau_{j+1}),$$

если $j+n$ – нечетное число, $0\le j<L_0$.

Решение $\theta_{k,i}(\tau_{j+1})$, $0\le i\le L_k$, $k=1,2,...,n$, разностной задачи находим приближенно по формуле (38) при условии (39).

Третья постановка задачи. Последовательные приближения $\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1})$, найденные в результате решения соответствующей разностной задачи, определяются выражениями, аналогичными (26)-(35), а также формулами

$$\theta_{n,L_n}^{(l)}(\tau_{j+1})=\frac{\theta_{n,L_n-1}(\tau_{j+1})+\Delta\xi_n f_n^{(l-1)}(\tau_{j+1})}{1+4\Delta\xi_n N_n},$$

если $j+n$ – четное число, $0\le j<L_0$;

$$\theta_{n,L_n-1}^{(l)}(\tau_{j+1})=$$

$$=\frac{\left(1+4\Delta\xi_n N_n\right)\left[\theta_{n,L_n-1}(\tau_j)+\gamma_n\theta_{n,L_n-2}(\tau_{j+1})\right]+\left(\gamma_n+\gamma_{n,L_n-1}\right)\Delta\xi_n f_n^{(l-1)}(\tau_{j+1})}{1+\gamma_n+4\Delta\xi_n N_n\left(1+2\gamma_n+\gamma_{n,L_n-1}\right)},$$

$$\theta_{n,L_n}^{(l)}(\tau_{j+1})=\frac{\theta_{n,L_n-1}(\tau_j)+\left(1+2\gamma_n+\gamma_{n,L_n-1}\right)\Delta\xi_n f_n^{(l-1)}(\tau_{j+1})+\gamma_n\theta_{n,L_n-2}(\tau_{j+1})}{1+\gamma_n+4\Delta\xi_n N_n\left(1+2\gamma_n+\gamma_{n,L_n-1}\right)},$$

если $j+n$ – нечетное число, $0\le j<L_0$.

Здесь использовано обозначение

$$f_n^{(l-1)}(\tau_{j+1})=N_n\left[\theta_s^4(\tau_{j+1})-\theta_{n,L_n}^{(l-1)4}(\tau_{j+1})+4\theta_{n,L_n}^{(l-1)}(\tau_{j+1})\right].$$

Приближенное решение $\theta_{k,i}(\tau_{j+1})$, $0\le i\le L_k$, $k=1,2,...,n$, разностной задачи определяем по формуле (38) при условии (39) в предположении, что

$$\theta_{*1,0}^{(0)}(\tau_{j+1})=\theta_{*n,L_n}^{(0)}(\tau_{j+1})=\mu,\quad \theta_{1,0}^{*(0)}(\tau_{j+1})=\theta_{n,L_n}^{(0)}(\tau_{j+1})=1.$$

Результаты численных исследований

Рассматривалась трехслойная сферическая система со следующими параметрами: $\xi_0 = 0,6,\ \xi_1 = 0,8,\ \xi_3 = 1,\ L_1 = L_2 = L_3 = 8,\ \theta_s = 1,\ \theta_e = 0,5,\ \theta_{F_3} = 1,$ $\theta_{10} = 0,4,\ \theta_{20} = 0,8,\ \ \theta_{30} = 0,6,\ \ \mu = 0,4,\ \ N_0 = N_3 = 1.$

Число Бугера $\mathrm{Bu} = (\alpha + \beta) r_3$, характеризующее оптическую плотность ослабляющей среды, заполняющей пространство V_0, принималось равным 1, а параметр $p = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$, характеризующий рассеяние среды, предполагался равным 0,5. Кроме того, точность расчётов ε полагалась равной 0,001, шаг по времени $\Delta\tau$ выбирался экспериментально из условия сходимости итерационного процесса.

Результаты расчётов представлены на рис. 2-7 в виде соответствующих графических зависимостей 1-6, полученных для следующих значений исходных данных:

1) $v_1 = 1,\ v_2 = 0,5,\ v_3 = 0,1,\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = 0,5,\ \delta_3 = 0,1;$

2) $v_1 = 1,\ v_2 = 0,1,\ v_3 = 0,5,\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = 0,1,\ \delta_3 = 0,5;$

3) $v_1 = 1,\ v_2 = 0,1,\ v_3 = 0,5,\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = 0,5,\ \delta_3 = 0,1;$

4) $v_1 = 1,\ v_2 = 0,5,\ v_3 = 0,01,\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = 0,5,\ \delta_3 = 0,01;$

5) $v_1 = 1,\ v_2 = 0,01,\ v_3 = 0,5,\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = 0,01,\ \delta_3 = 0,5;$

6) $v_1 = 1,\ v_2 = 10,\ v_3 = 5,\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = 10,\ \delta_3 = 5.$

Кривые на рис. 2*а*-4*а* изображают распределения температуры по толщине трехслойной сферической системы V в момент времени τ = 0,1,а кривые на рис. 2*б*-4*б* показывают зависимости от времени τ температуры поверхности F_0.

Графики, представленные на рис. 5*а*-7*а*, иллюстрируют распределения значений плотности объёмного результирующего излучения по толщине ослабляющей среды, заполняющей пространство V_0, в момент времени τ = 0,1, а графики на рис. 5*б*-7*б* изображают зависимости от времени τ значений плотности объёмного результирующего излучения в центре сферической системы.

В заключение заметим, что все вычисления и построения графиков выполнены с использованием многофункционального пакета инженерных расчётов MathCAD 12.0.

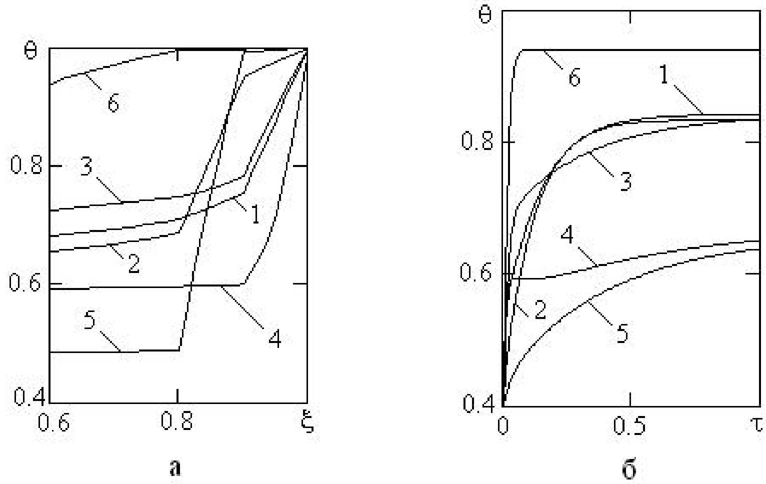

Рис. 2. Распределения температур в сферической системе (первая постановка задачи)

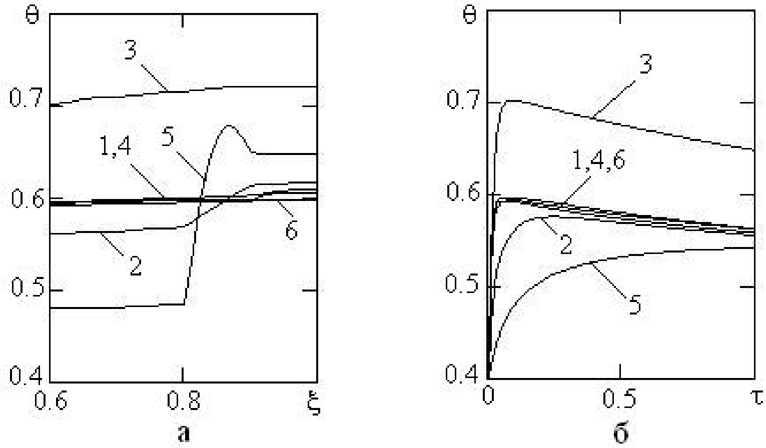

Рис. 3. Распределения температур в сферической системе (вторая постановка задачи)

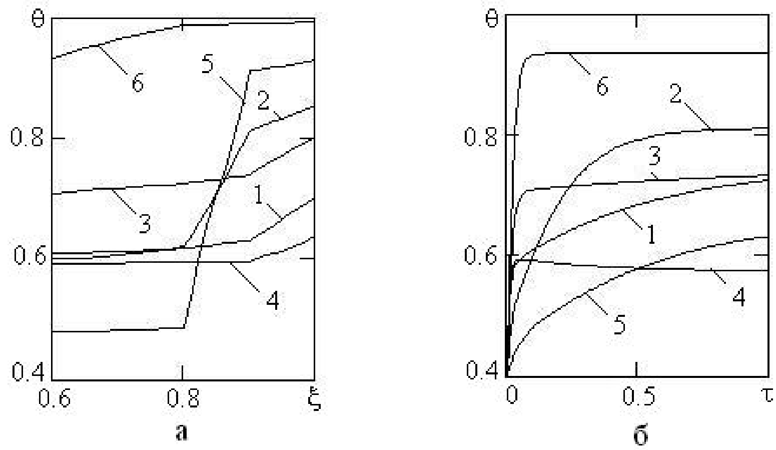

Рис. 4. Распределения температур в сферической системе (третья постановка задачи)

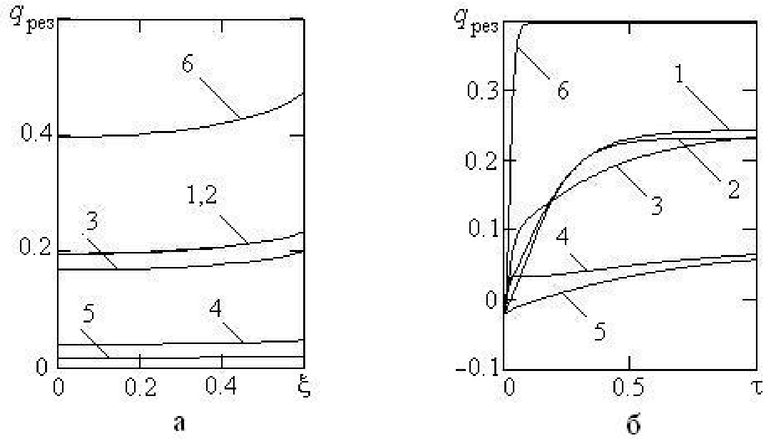

Рис. 5. Распределения плотности объёмного результирующего излучения (первая постановка задачи)

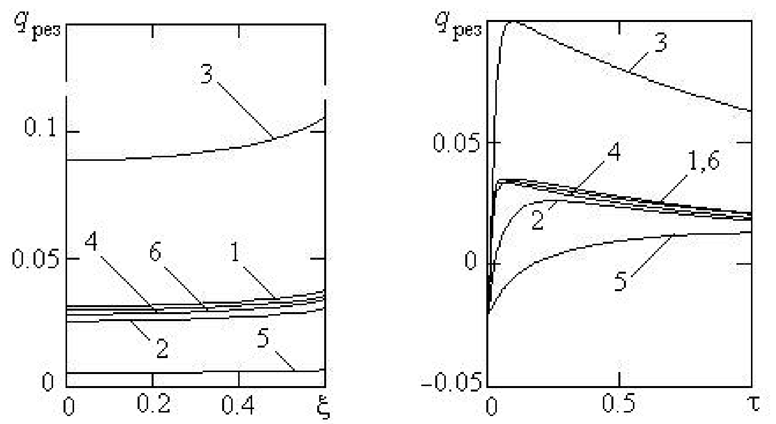

Рис. 6. Распределения плотности объёмного результирующего излучения (вторая постановка задачи)

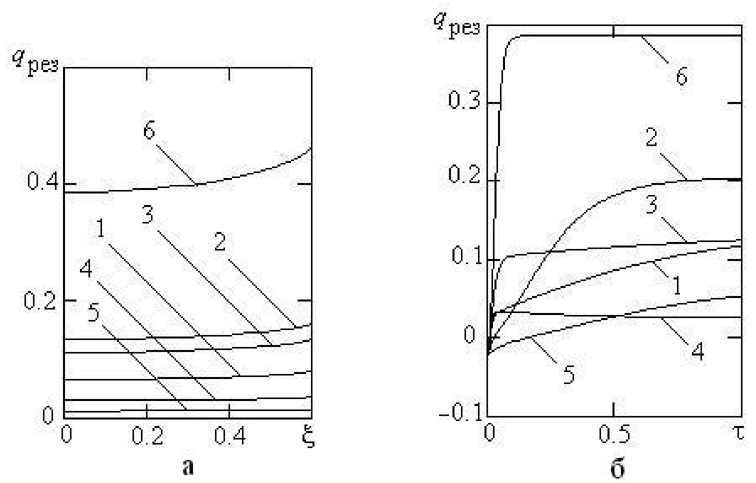

Рис. 7. Распределения плотности объёмного результирующего излучения (третья постановка задачи)

Выводы

Численно решена нестационарная задача о радиационно-кондуктивном теплообмене в системе, ограниченной многослойным теплопроводным телом сферической формы и заполненной поглощающей и рассеивающей средой. Рассмотрены три постановки задачи, характеризующиеся различными способами задания граничных условий.

Изложен новый подход к решению, основанный на совместном использовании обобщенного зонального метода, метода конечных разностей и метода последовательных двусторонних приближений. С помощью полученных расчётных формул и выражений выполнены численные исследования нестационарного поля температур в трехслойной сферической системе и поля значений плотности объёмного результирующего излучения в ослабляющей среде, заполняющей систему. Результаты расчётов представлены в виде многочисленных графических зависимостей.

Полученные расчётные соотношения и графические зависимости могут быть использованы для решения актуальных проблем противопожарной защиты объектов различного назначения.

Литература

1. ***Зигель Р., Хауэлл Дж.*** Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 934 с.

2. ***Суринов Ю.А.*** К теории переноса излучения и лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1966. № 6. С. 127-153.

3. ***Рубцов В.В., Суринов Ю.А.*** О методах решения нестационарных задач теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Журнал вычисл. математ. и математ. физики. 1989. Т.29. № 11. С. 1705-1713.

4. ***Суринов Ю.А.*** О некоторых вопросах стохастической теории переноса излучения и радиационного теплообмена // Изв. вуз.Черная металлургия. 1992. № 5. С. 76-81.

5. ***Суринов Ю.А.*** Обобщенный зональный метод исследования и расчёта лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1975. № 4. С. 112-137.

6. ***Рубцов В.В.*** Стационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в системе из двух теплопроводных концентрических сферических тел, разделенных ослабляющей средой // Изв. вуз.Черная металлургия. 2009. № 3. С. 42-46.

7. ***Gourlay A.R.*** Hopscotch a Fast Second – Order Partial Differential Equation Solver // J. Inst. Math. Appl. 1970. V. 6. Pp. 375-390.

8. ***Рубцов В.В.*** Нестационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в системе, ограниченной теплопроводным сферическим телом и заполненной ослабляющей средой // Вестник научно-технического развития. № 12 (64). 2012. С. 17-25. http://www.vntr.ru