УДК:001.897.57

Н.А. Кузьменко
(ЗАО "РТИ-Инвест"; e-mail: antonetskna2016@yandex.ru)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПАСНЫХ ЭНДОГЕННЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Предлагаются математические методы оценки пространственно-динамических характеристик опасных эндогенных геофизических процессов. Результаты решения этой задачи являются важной информацией для оптимального управления ресурсами МЧС России в условиях реализации геодинамических угроз.

Ключевые слова: опасные геофизические процессы, миграция сейсмической энергии.

N.A. Kuzmenko

MATHEMATICAL METHODS OF ASSESSMENT FOR TERRITORIAL AND DYNAMIC CHARACTERISTICS OF DANGEROUS ENDOGENOUS GEOPHYSICAL PROCESSES

Mathematical methods of assessment of territorial and dynamic characteristics of dangerous endogenous geophysical processes are considered. Results of solving this task are an important information for the optimal resource management of the Emercom of Russia in conditions of realization of geodynamical treats.

Key words: dangerous geophysical processes, migration of seismic energy.

Статья поступила в редакцию Интернет-журнала 29 июля 2016 г.

Введение

Параметры, необходимые для оценки пространственно-динамических характеристик ***опасных эндогенных геологических процессов (ОЭГП***), такие как сдвиговые напряжения, смещения в геологической среде, относительная плотность потенциальной энергии деформируемых пород геологической среды, определяются с использованием соответствующих математических методов. Значения этих параметров необходимы для решения задачи построения траектории миграции энергии опасных эндогенных геологических процессов. Результаты решения задачи направлены на обоснование управленческих решений, принимаемых в МЧС России при расстановке сил и средств практических подразделений в случае возникновения геодинамических угроз.

Безусловно, существуют и экспериментальные способы определения этих параметров, такие, например, как оценки напряжений по структурно-геоморфологическим данным [3], по ориентации осей сжатия-растяжения в региональных масштабах [9], по скоростям современных вертикальных движений земной коры, используя данные повторного нивелирования [5, 8], по горизонтальным смещениям (по данным геодезических измерений, в том числе с использованием средств космической техники) [7].

Однако эти достаточно дорогостоящие оценки могут быть получены либо для небольших, ограниченных территорий, либо исключительно для верхних слоёв земной коры (или вообще для земной поверхности), при этом нося подчас весьма приближённый, а в ряде случаев – даже противоречивый, дискуссионный характер.

Между тем, в последнее время достаточно бурное развитие получили математические методы оценки геодинамических рисков [4, 6], позволяющие получать достаточно адекватные, по своему приближению к измеряемым экспериментальными методами, величины геодинамических напряжений и смещений для любого глубинного уровня практически в любом регионе планеты самого различного геологического строения.

Существующие на сегодняшний день математические методы оценок геодинамических напряжений и смещений имеют достаточно разветвлённую классификацию, разработаны целые классы как детерминированных, вероятностных, так и методов, основанных на теории нечётких множеств.

Обоснование математических методов

В приложении к решению задачи оценки пространственно-динамических характеристик ОЭГП будем разрабатывать детерминированную пространственную (трёхмерную) математическую зависимость, выбор которой обусловлен следующими соображениями.

1. Для целого ряда модельных регионов известны пространственно-распределённые поля исходных данных: аномальное гравитационное поле, рельеф границы Мохоровичича (граница Мохо), топографический рельеф местности и, соответственно, глубины океанов и морей, рельеф их дна, плотностные, вязкие и упругие характеристики геологической среды для выбранного глубинного уровня.

2. Обязательным условием определения траектории миграции энергии опасных эндогенных геологических процессов является взаимосвязанный учёт основных факторов, приводящих к возникновению опасного эндогенного геологического процесса.

Поэтому и разрабатываемый математический метод должен учитывать весь комплекс указанных факторов, определяемый через систему параметров, подобранных для исследования пространственно-динамических характеристик ОЭГП. Это – аномалии гравитационного поля, рельеф границы Мохо, рельеф земной поверхности с учётом водных бассейнов, плотностные, упругие и вязкие свойства земной коры. Все эти параметры связаны между собой устойчивыми причинно-следственными отношениями, что также определяет применение именно детерминированных методов.

3. Свойства всех распределённых полей-источников изменяются как в латеральном, так и в глубинном направлениях. Именно поэтому создаваемый математический метод должен быть пространственным (трёхмерным) детерминированным.

Граничные условия существования модели

Сформулируем граничные условия для использования математических методов.

Исследуемый регион представим в виде трёхмерного упруго-вязкого слоя шириной 11086 *км* (по широте), длиной – в среднем 11131 *км* (по долготе) и толщиной (глубиной) – 66 *км*. Длина по долготе указана в среднем потому, что при таких размерах региона уже нельзя пренебрегать сферичностью Земли, как это было во всех ранее разработанных другими авторами методах. Об учёте сферичности Земли поговорим далее, а пока изложим непосредственно сами граничные условия.

Итак, к нижней границе расчётного упруго-вязкого пространства приложена некоторая распределённая "нагрузка", определяемая посредством совместного учёта влияний со стороны аномалий гравитационного поля (рис. 1) и рельефа границы Мохо. Эта "нагрузка" уравновешивается вертикальными нормальными геодинамическими напряжениями и воздействием от вертикальных смещений, возникающими в упруго-вязком пространстве на границе раздела "земная кора – литосферная мантия" (на границе Мохо). На этой границе необходимо учесть скачок плотности, который имеет в среднем величину 260 $кг/м^3$.

На верхней границе расчётного пространства (на дневной поверхности Земли) все силовые (возмущающие) воздействия должны быть скомпенсированы. Поэтому вертикальные нормальные напряжения на дневной поверхности уравновешиваются воздействием от вертикальных смещений, которые фактически зависят от топографического рельефа поверхности Земли, включая горные области и океанические понижения с водными массами.

Поскольку в расчётных построениях мы используем, вслед за авторами работ [4, 6], бигармоническую функцию [1] и математический аппарат Фурье-преобразования [9], потребуются четыре условия, определяемые количеством неизвестных коэффициентов, входящих в бигармоническую функцию.

Так как в двух первых условиях задействованы нормальные напряжения, то в оставшихся двух нужно учесть влияние на расчёт сдвиговых напряжений, которые имеют наибольшую значимость для решения поставленной задачи. Эти условия связаны с тем, что сдвиговые напряжения в вертикальной плоскости должны быть равны нулю.

На верхней поверхности слоя, то есть на дневной поверхности Земли, это очевидно, поскольку на границе раздела земная кора – атмосфера никаких вертикальных сдвиговых напряжений быть не может. Горизонтальные сдвиговые напряжения, напротив, вблизи верхней поверхности могут иметь достаточно большую величину (что и объясняет наличие приповерхностных землетрясений).

Что же касается нижней поверхности расчётного пространства, то здесь дело обстоит следующим образом. По данным работы [2] о величинах вязкости земной коры, принимаем, что величина вязкости в небольшом слое в окрестности границы Мохо скачкообразно падает на один порядок. Учитывая это, а также и то, что на границе Мохо пластичность может быть значительной, горизонтальные сдвиговые напряжения также будут уменьшаться в пределах одного порядка в её окрестности Мохо. Вертикальные же сдвиговые напряжения, по модельным соображениям, так же, как и у верхней поверхности, будут отсутствовать, поскольку ниже границы Мохо среда уже не упруго-вязкая, а исключительно вязкая.

Представим граничные условия математической системы в виде следующих уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_z(x,y,h) + \rho(x,y,h)\cdot g \cdot u_z(x,y,h) = 0; \\ \sigma_z(x,y,0) + \delta\rho \cdot g \cdot u_z(x,y,0) = \rho(x,y,0)\cdot \Delta g_u(x,y)\cdot H(x,y); \\ \tau_{xz}(x,y,h) = 0; \\ \tau_{xz}(x,y,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где σ_z – вертикальные нормальные напряжения;

τ_{xz} – сдвиговые вертикальные напряжения в плоскости XZ (в плоскости YZ условия для вертикальных сдвиговых напряжений будут аналогичными для плоскости XZ);

u_z – вертикальные смещения в геологической среде;

$\delta\rho$ – скачок плотности на границе раздела земная кора – литосферная мантия (на границе Мохо);

ρ – значение плотности на соответствующей глубине и в соответствующей точке с координатами (x, y);

Δg_u – значение аномалии гравитационного поля в изостатической редукции в точке с координатами (x, y);

$H(x,y)$ – глубина залегания границы Мохо;

g – ускорение свободного падения, которое принимается постоянным для любой точки (x, y, z) модельного пространства h – толщина модельного пространства.

Таким образом, первое уравнение системы (1) – это условие о компенсации воздействий на верхней границе (дневной поверхности Земли). Второе уравнение системы (1) – условие влияния возмущений от распределённой “нагрузки” на нижней границе (границе Мохо). Третье и четвёртое уравнения системы (1) отражают факт отсутствия вертикальных сдвиговых напряжений на верхней и нижней границах расчётного пространства.

Подставим в граничные условия (1) соотношения для соответствующих компонент тензора геодинамических напряжений ($\sigma_z;\tau_{xz}$) и вертикальной составляющей смещений u_z в геологической среде [4]:

$$\begin{cases} \sigma_z^{(k)}(x,y,z)=k^2\left\{\left[\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}C-k(B+Dz)\right]shkz+\left[\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}D-k(A+Cz)\right]chkz\right\}\cos k_x x\cos k_y y, \\ \tau_{xz}^{(k)}(x,y,z)=kk_x\left\{\left[k(A+Cz)+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}D\right]shkz+\left[k(B+Dz)+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}C\right]chkz\right\}\sin k_x x\cos k_y y, \\ u_z^{(k)}(x,y,z)=\dfrac{k}{2\mu}\left\{\left[\dfrac{2\mu}{\lambda+\mu}D-k(A+Cz)\right]shkz+\left[\dfrac{2\mu}{\lambda+\mu}C-k(B+Dz)\right]chkz\right\}\cos k_x\cos k_y y, \end{cases} \quad (2)$$

где $k_x=\dfrac{\pi m}{a}$; $k_y=\dfrac{\pi n}{b}$; $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ (m, n – порядковые номера гармоник по осям X и Y соответственно);

a – длина расчётного пространства (по оси X);

b – ширина расчётного пространства (по оси Y);

A, B, C, D – неизвестные коэффициенты, входящие в бигармоническую функцию вида:

$$\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{(A_{mn}+D_{mn}z)shkz+(B_{mn}+C_{mn}z)chkz\}\cos k_x x\cos k_y y\,. \quad (3)$$

Распределённая "нагрузка" $N(x, y)$ также представляется в виде периодической функции (соотношение приведено для k-й гармоники):

$$N^{(k)}(x,y)=\rho(x,y,0)\Delta g_u{}^{(k)}(x,y)H(x,y)\cos k_x x\cos k_y y\,. \quad (4)$$

Во всех последующих соотношениях также полагается, что величины ρ, λ, μ являются функциями от переменных x, y, z.

Нахождение коэффициентов

После подстановки соотношений системы (3) в соответствующие условия системы (2) и ряда упрощений получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \left\{\left[\dfrac{\mu k}{\lambda+\mu}C-k^2(B+Dh)\right]sh(kh)+\left[\dfrac{\mu k}{\lambda+\mu}D-k^2(A+Ch)\right]ch(kh)\right\}+ \\ +\left\{\left[\dfrac{\rho g}{\lambda+\mu}D-\dfrac{k\rho g}{2\mu}(A+Ch)\right]sh(kh)+\left[\dfrac{\rho g}{\lambda+\mu}C-\dfrac{k\rho g}{2\mu}(B+Dh)\right]ch(kh)\right\}=0; \\ \left(\dfrac{\mu k^2}{\lambda+\mu}D-k^3A\right)+\left(\dfrac{k\delta\rho g}{\lambda+\mu}C-\dfrac{k^2\delta\rho g}{2\mu}B\right)=\rho\Delta g_u{}^{(k)}(x,y)H(x,y); \\ \left(kA+Ckh+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}D\right)sh(kh)+\left(kB+Dkh+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}C\right)ch(kh)=0; \\ kB+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}C=0. \end{cases} \quad (5)$$

Выражая из четвёртого уравнения (5) неизвестную величину B и подставляя полученное для неё соотношение в остальные три уравнения этой системы, придём к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} kC\left[sh(kh)-khch(kh)-\dfrac{\rho gh}{2\mu}sh(kh)+\dfrac{\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu k(\lambda+\mu)}ch(kh)\right]+kD\left[\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}ch(kh)-\right. \\ \left.-khsh(kh)+\dfrac{\rho g}{k(\lambda+\mu)}sh(kh)-\dfrac{\rho gh}{2\mu}ch(kh)\right]-kA\left(kch(kh)+\dfrac{\rho g}{2\mu}sh(kh)\right)=0; \\ \dfrac{\mu k^2}{\lambda+\mu}D-k^3A+\dfrac{k\delta\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}C=\rho\Delta g_u{}^{(k)}(x,y)H(x,y); \\ kA+Ckh+D\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}+khcth(kh)\right)=0. \end{cases} \tag{6}$$

Аналогичным образом, выражая из третьего уравнения системы (6) неизвестную величину A и подставляя полученное для неё соотношение в оставшиеся уравнения этой системы, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными C и D:

$$\begin{cases} kC\left[sh(kh)\left(1-\dfrac{\rho gh}{2\mu}\right)+ch(kh)\left(\dfrac{\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu k(\lambda+\mu)}-kh\right)\right]+kD\left[ch(kh)\left(\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}-\dfrac{\rho gh}{2\mu}\right)+\right. \\ \left.+sh(kh)\left(\dfrac{\rho g}{k(\lambda+\mu)}-kh\right)\right]+\left[Ckh+kD\left(\dfrac{\lambda}{k(\lambda+\mu)}+hcth(kh)\right)\right]\left(kch(kh)+\dfrac{\rho g}{2\mu}sh(kh)\right)=0; \\ \dfrac{\mu k^2}{\lambda+\mu}D+k^2\left[Ckh+kD\left(\dfrac{\lambda}{k(\lambda+\mu)}+hcth(kh)\right)\right]+\dfrac{k\delta\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}C=\rho\Delta g_u{}^{(k)}(x,y)H(x,y). \end{cases} \tag{7}$$

После преобразований система (7) сводится к системе уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} kC\left[sh(kh)+\dfrac{\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu k(\lambda+\mu)}ch(kh)\right]+kD\left[ch(kh)\left(1-\dfrac{\rho gh}{2\mu}+khcth(kh)\right)+\right. \\ \left.+sh(kh)\left(\dfrac{\rho g(2\mu+\lambda+kh(\lambda+\mu)cth(kh))}{2\mu k(\lambda+\mu)}-kh\right)\right]=0; \\ kC=\dfrac{\rho\Delta g_u{}^{(k)}(x,y)H(x,y)-kD\left(k+k^2hcth(kh)\right)}{k^2h+\dfrac{\delta\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}}. \end{cases} \tag{8}$$

Подставляя второе выражение системы (8) в первое соотношение этой же системы, получим уравнение, содержащее только одну неизвестную величину D:

$$kD\left\{\frac{k\left(1+khcth(kh)\right)\left[sh(kh)+\dfrac{\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu k(\lambda+\mu)}ch(kh)\right]}{k^2h+\dfrac{\delta\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}}-sh(kh)\left[\frac{\rho g\left(\lambda+2\mu+kh(\lambda+\mu)cth(kh)\right)}{2\mu k(\lambda+\mu)}-kh\right]-\right.$$

$$\left.-ch(kh)\left(1-\frac{\rho gh}{2\mu}+khcth(kh)\right)\right\}=\frac{\rho\Delta g_u^{(k)}(x,y)H(x,y)\left[sh(kh)+\dfrac{\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu k(\lambda+\mu)}ch(kh)\right]}{k^2h+\dfrac{\delta\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}}. \quad (9)$$

Преобразовывая соотношение (9) и вводя затем в него функцию

$$\theta(x,y,z)=\left[k^2h+\frac{\delta\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}\right]\left\{\frac{k\left(1+khcth(kh)\right)\left[sh(kh)+\dfrac{\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu k(\lambda+\mu)}ch(kh)\right]}{k^2h+\dfrac{\delta\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}}-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\rho g\left(\lambda+2\mu+kh(\lambda+\mu)cth(kh)\right)}{2\mu k(\lambda+\mu)}-kh\right]sh(kh)-\left(1-\frac{\rho gh}{2\mu}+khcth(kh)\right)ch(kh)\right\},$$

получим следующее выражение для коэффициента D:

$$D=\frac{\rho g_u^{(k)}(x,y)H(x,y)\left[sh(kh)+\dfrac{\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu k(\lambda+\mu)}ch(kh)\right]}{k\theta(x,y,z)}. \quad (10)$$

Обозначая в соотношении (10) $F(x,y,z)=\dfrac{\rho\Delta g_u^{(k)}(x,y)H(x,y)}{k\theta(x,y,z)}$ и $M(x,y,z)=sh(kh)+\dfrac{\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu k(\lambda+\mu)}ch(kh)$, получим более компактное выражение для нахождения коэффициента D:

$$D=F(x,y,z)M(x,y,z). \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) во второе соотношение системы (8), получим следующее выражение для нахождения коэффициента C:

$$C=\frac{\rho\Delta g_u^{(k)}(x,y)H(x,y)\left\{\theta(x,y,z)-k\left(1+khcth(kh)\right)\left[sh(kh)+\dfrac{\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu k(\lambda+\mu)}ch(kh)\right]\right\}}{k\theta(x,y,z)\left[k^2h+\dfrac{\delta\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}\right]},$$

или, используя обозначения соотношения (3.26) и вводя новую вспомогательную функцию вида $R(x,y,z)=k^2h+\frac{\delta\rho g(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}$, получим другое компактное выражение для коэффициента C:

$$C=\frac{F(x,y,z)\left[\theta(x,y,z)-k\left(1+khcth(kh)\right)M(x,y,z)\right]}{R(x,y,z)}. \tag{12}$$

Подстановки (11) и (12) в третье уравнение системы (7) позволяют нам получить соотношение для нахождения коэффициента A:

$$A=-\frac{hF(x,y,z)\left[\theta(x,y,z)-k\left(1+khcth(kh)\right)M(x,y,z)\right]}{R(x,y,z)}, \tag{13}$$

а подстановка (12) в четвёртое уравнение системы (6) дает нам возможность построить соотношение для нахождения коэффициента B:

$$C=\frac{F(x,y,z)\left[\theta(x,y,z)-k\left(1+khcth(kh)\right)M(x,y,z)\right]}{R(x,y,z)}. \tag{14}$$

Введение новой функции вида $T(x,y,z)=\frac{\theta(x,y,z)-L(k,h)M(x,y,z)}{R(x,y,z)}$, где $L(k,h)=k\left(1+khcth(kh)\right)$ (эта функция зависит исключительно от толщины модельного трёхмерного слоя и номера гармоники), позволяет получить окончательные компактные расчётные соотношения для нахождения неизвестных коэффициентов A, B, C, D, входящих в выражения для компонент тензора геодинамических напряжений и составляющих вектора смещений в геологической среде:

$$\begin{cases} A=-hF(x,y,z)T(x,y,z); \\ B=-\dfrac{\lambda F(x,y,z)T(x,y,z)}{k(\lambda+\mu)}; \\ C=F(x,y,z)T(x,y,z); \\ D=F(x,y,z)M(x,y,z). \end{cases} \tag{15}$$

Выводы

1. Разработанные трёхмерные детерминированные математические зависимости для пространственно-динамических характеристик опасных эндогенных геологических процессов необходимы для решения задачи построения траектории миграции энергии этих процессов. Результаты необходимы для обоснования управленческих решений, принимаемых в МЧС России при расстановке сил и средств практических подразделений в случае возникновения геодинамических угроз.

2. Важнейшими отличительными особенностями математических зависимостей являются:

- переменная толщина модельного пространства;
- учёт рельефа поверхности Мохо;
- пространственная вариативность упруго-вязких и плотностных характеристик земной коры;
- учёт кривизны поверхности планеты.

Указанные отличительные особенности математических зависимостей говорят об их новизне и большей приближённости к описанию реальных условий протекания опасных эндогенных геологических процессов, по сравнению с ранее разработанными.

3. Для практической реализации разработанных зависимостей необходимо получить расчётные соотношения для неизвестных коэффициентов, входящих в выражения для компонент тензора геодинамических напряжений и составляющих вектора смещений в геологической среде.

Литература

1. ***Власов В.В.*** Метод начальных функций в задачах теории упругости // Известия АН СССР. М.: ОТН, №7, 1955. С. 25-35.

2. ***Гзовский М.В.*** Основы тектонофизики. М.: Наука, 1975. 536 с.

3. ***Гласко М.П., Ранцман Е.Я.*** Морфоструктурные узлы – места активизации природных процессов // Доклады Академии наук. 1996. Т. 350. №3. С. 397-400.

4. ***Минаев В.А., Фаддеев А.О.*** Оценки геоэкологических рисков. Моделирование безопасности туристско-рекреационных территорий. М.: Финансы и статистика, изд. дом "ИНФРА-М", 2009. 370 с.

5. ***Минаев В.А., Фаддеев А.О., Данилов Р.М. и др.*** Математическое моделирование сейсмических рисков // Спецтехника и связь. 2013. № 5. С. 58-63.

6. ***Минаев В.А., Фаддеев А.О., Абрамова А.В.*** Разломно-узловая тектоническая модель оценки геодинамической устойчивости территориальных систем // Проблемы управления рисками в техносфере. 2014. № 1 (29). С. 90-99.

7. ***Минаев В.А., Фаддеев А.О., Абрамова А.В., Павлова С.А.*** Обобщенная вероятностная модель оценки геодинамической устойчивости среды территориальных природно-технических систем// Вестник РосНОУ. Управление, вычислительная техника и информатика. Вып. 4. 2013. С. 12-18.

8. ***Минаев В.А., Фаддеев А.О., Абрамова А.В., Павлова С.А.*** Комплексная математическая модель оценки сейсмических рисков // Вестник РосНОУ. Управление, вычислительная техника и информатика. Вып/ 4. 2013. С. 19-24.

9. ***Рогожин Е.А., Собисевич Л.Е., Нечаев Ю.В. и др.*** Геодинамика, сейсмотектоника и вулканизм Северного Кавказа. М.: ОИФЗ РАН, 2001. 336 с.

10. ***Снеддон И.Н.*** Преобразования Фурье. М.: изд-во ИЛ, 1956. 668 с.